

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE, LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LIV - ANNO CXXVI

(1987)



LIGUORI EDITORE

SOCIETÀ NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI IN NAPOLI

RENDICONTO
DELL'ACCADEMIA DELLE SCIENZE
FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV - VOL. LIV - ANNO CXXVI

(1987)

LIGUORI EDITORE

Pubblicato da Liguori Editore
Via Mezzocannone 19, 80134 Napoli

© Liguori Editore, S.r.l., 1988

I diritti di traduzione, riproduzione e adattamento totale o parziale sono riservati per tutti i Paesi. Nessuna parte di questo volume può essere riprodotta, registrata o trasmessa con qualsiasi mezzo: elettronico, elettrostatico, meccanico, fotografico, ottico o magnetico (compresi microfilm, microfiches e copie fotostatiche).

Prima edizione italiana Settembre 1988

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0

1995 1994 1993 1992 1991 1990 1989 1988

Le cifre sulla destra indicano il numero e l'anno dell'ultima ristampa effettuata.

Printed in Italy, Liguori Editore, Napoli

ISBN 88 - 207 - 1686 - 0

Il litorale del Parco Nazionale del Circeo:
caratteri morfologici e sedimentologici; deriva dei sedimenti.

Nota di E. COCCO, M.A. de MAGISTRIS, A. DE MATTEIS, T. DE PIPPO, (*)

presentata dal socio ordinario

Bruno D'Argenio

Adunanza del 10 gennaio 1987

Riassunto

Le indagini condotte lungo il litorale del Parco Nazionale del Circeo, nella fascia compresa tra Torre Astura ed il promontorio di M.te Circeo, hanno consentito di delineare i caratteri morfologici e sedimentologici della spiaggia emersa e sommersa.

Il litorale è costituito da spiagge basse e sabbiose limitate verso l'interno da un cordone dunare che nell'area settentrionale presenta vistosi fenomeni di erosione. La spiaggia sommersa è caratterizzata dalla presenza di due ordini di barre di cui la più interna ad andamento molto irregolare mentre quella esterna si sviluppa parallelamente alla costa senza soluzione di continuità. I sedimenti passano da sabbie medie a molto fini procedendo dalla costa verso il largo.

Le indagini sperimentali per la determinazione della direzione e verso del trasporto lungo costa hanno evidenziato l'esistenza di deboli drift da Sud e da Nord diretti verso l'area centrale del settore costiero.

Per quanto attiene la tendenza evolutiva l'area in studio è stata soggetta a fenomeni di protendimento generalizzato nel periodo 1878/1936.

A partire da tale data l'evoluzione del settore si presenta alquanto differenziata con aree in protendimento (Foce Verde-Lago di Fogliano), aree in arretramento (Lago dei Monaci e Lago di Caprolace) ed aree nelle quali si alternano tratti a debole avanzamento o arretramento (lago di Sabaudia).

(*) Dipartimento di Scienze della Terra - Università di Napoli - Largo
S.Marcellino, 10 - 80138 NAPOLI

Abstract

The researches carried out along the littoral of Circeo National Park in the sector comprises between Torre Astura and Cape Circeo, have been allowed to sketch out morphological and sedimentological characteristics of the foreshore and backshore. Low and sandy beaches, making up the littoral, are limited landward by a dune ridge which presents evident erosional phenomena.

The foreshore is characterized by the presence of two order of bars; the inner one presents a very irregular trend whereas the outer bar is developed parallel to the shoreline without solution of continuity. The sediment decreases from medium sands to very fine sands proceedings from shoreline to offshore. The experimental surveys for the determination of the direction of the longshore transport have pointed out the existence of weak drifts from south and from north toward the central area of this sector.

As regards the evolution of the shoreline, it has been subject to a general accretion in the period 1878/1936. From this last year the entire littoral investigated has shown a differential development; so the area comprises between Foce Verde and Fogliano Lake has been in accretion, in stead the areas near the Monaci and Caprolace Lakes have been in recession, at the end there have been some zones where alternatively occurs a weak accretion or a little recession (Sabaudia Lake).

Premessa

Vengono esposti in questa nota i risultati delle indagini sulla evoluzione e dinamica del litorale del Parco Nazionale del Circeo (tra il Lago di Fogliano ed il Lago di Sabaudia)effettuate nel 1982/83 con il contributo finanziario del Min. Agricoltura e Foreste nell'ambito del Programma sulla Forestazione.

L'area studiata è compresa tra Torre Astura (a nord) e M.te Circeo (a sud) per uno sviluppo di circa 18 Km (Fig. 1); la spiaggia bassa e sabbiosa è limitata verso l'interno da un cordone dunare d'ampiezza ed altezza crescente procedendo da NW verso SE quindi da una serie di laghi costieri.

Petrograficamente le sabbie risultano costituite da abbondanza di minerali pesanti (augite, granato, melanite) e di quarzo subordinatamente carbonati e feldspati.

Il rifornimento dei materiali avviene principalmente ad opera del F. Astura (con un bacino idrografico di circa 400 Km² e un deflusso torbido medio annuo di oltre 10 mc) e subordinatamente ad opera dei numerosi canali afferenti al litorale tra i quali si citano il Canale delle Acque Alte, Rio Martino e Fosso Moscarello.

Dal punto di vista meteomarinario il litorale in esame presenta un settore

di traversia ampio 140° , delimitato dalle direttrici tangenti a Torre Astura (290°) e al Monte Circeo (150°) - II III e IV quadrante. Le distese di mare libero risultano comprese tra 290 Km (per $230^\circ/290^\circ$) e 880 Km (per $185^\circ/200^\circ$) -Fig. 2-.

Dall'analisi degli eventi meteomarinii significativi (con durata non inferiore a 6 ore e velocità del vento non inferiore a 20 nodi) desunti dalle registrazioni dell'A.M. stazione di Ponza, si è constatato che le mareggiate causate dai venti di ponente-maestro sono più frequenti e violente rispetto a quelle prodotte dai venti di libeccio e di mezzogiorno. Le prime a causa dei fenomeni di rifrazione sottocosta presentano fronti d'onda molto inclinati e rivolti verso sud, le seconde presentano fronti d'onda rispettivamente paralleli alla costa e inclinati verso nord.

Caratteristiche morfologiche e sedimentologiche

I caratteri morfologici e sedimentologici sono stati desunti da rilevamenti topografici e batimetrici nonché dall'analisi tessiturale di sedimenti di duna e di spiaggia emersa e sommersa.

In particolare nel maggio 1982 è stata eseguita una prima campagna di studio nel corso della quale si è proceduto al rilevamento batimetrico (12 profili trasversali alla costa), al prelievo di sedimenti di spiaggia emersa e sommersa (per un totale di 102 campioni) e all'immissione di traccianti artificiali di fondo (sea bed drifters). Una seconda campagna tra l'ottobre 1982 ed il giugno 1983 ha interessato esclusivamente l'area compresa tra il Lago dei Monaci ed il Lago di Caprolace, con rilevamenti della spiaggia emersa e sommersa ed immissione drifters.

I profili sono stati effettuati in corrispondenza di caposaldi posizionati al margine della strada litoranea a distanze di 500/1000 m (area del Lago dei Monaci e di Caprolace) o di 4 Km (area del Lago di Paola).

In corrispondenza di ciascun profilo venivano prelevati campioni di spiaggia p.d., di battigia e di spiaggia sottomarina ad ogni metro di profondità fino a -6 m; a profili alterni sono stati prelevati campioni di duna e di fondo marino alla profondità di -10 m.

Spiaggia emersa

Il litorale del Parco costituisce un'ampia falcatura con andamento dapprima da NW a SE quindi, grosso modo all'altezza del Lago di Caprolace, da NNW a SSE.

La spiaggia è limitata verso l'interno da un cordone dunare composto di altezza ed estensione crescenti con gradualità procedendo dalle aree settentrionali (rispettivamente 5 m e 50 m circa) verso le aree meridionali (27 m

e 300 m circa)

Da rimarcare che proprio nell'area settentrionale, dove il cordone dunare è più basso e meno ampio, il litorale è soggetto attualmente a vistosi fenomeni di erosione evidenziati da una spiaggia di ampiezza molto ridotta e da scarpate subverticali di altezza superiore ai 3 m, incise nella duna (Fig. 3). In alcuni punti l'erosione ha comportato il franamento della strada litoranea impostata sul cordone stesso (Fig. 4).

La Fig. 5 riporta i profili topografici più significativi del litorale. L'ampiezza della spiaggia è compresa tra 10 e 40 m, l'altezza della duna tra 5 e 27 m. La pendenza della battigia varia tra il 4% ed il 20%, la pendenza della spiaggia tra il 6% ed il 12%.

Dal punto di vista tessiturale i depositi della spiaggia emersa possono essere classificati come sabbie medie e fini molto ben assortite, asimmetriche da molta a estremamente leptocurtiche (Tab. 1). Da sottolineare la diminuzione del valore del diametro medio procedendo dalla zona del Lago di Fogliano (a nord) e dalla zona del lago di Paola (a sud), verso le aree centrali del settore (Lago di Caprolace, Fig.6).

Spiaggia sommersa

L'esecuzione dei profili batimetrici trasversali alla costa ha consentito di evidenziare i caratteri morfologici della spiaggia sottomarina e di costruire una carta batimetrica (Fig. 7) nella quale si osserva un andamento delle isobate molto regolare a partire dalla profondità di -5 m. All'interno di tale profondità le isobate si presentano più articolate ad indicare l'esistenza di due ordini di barre sottomarine con caratteri differenziati.

Il primo ordine (barra interna) ha un andamento molto irregolare con creste ubicate a profondità di -1.5/2 m ad una distanza dalla costa compresa tra 40 e 150 m. Molto spesso tali barre si raccordano alla battigia (Fig. 8) imprimendo alla linea di riva la caratteristica configurazione ritmica (Cocco 1975).

Il secondo ordine (barra esterna) si sviluppa con maggiore regolarità parallelamente alla linea di costa ad una distanza dalla battigia compresa tra 150 e 300 m; esso è separato dalla barra interna da un trugolo profondo tra 3.5 e 5.5 m. Da rilevare che in corrispondenza dei profili 8 e 9 la barra esterna tende ad appiattirsi fino a scomparire all'altezza dei profili 10 e 11; essa ricompare in corrispondenza del profilo 12 ad una distanza dalla battigia di 450 m ed è separata dalla barra interna da un trugolo profondo 6.5 m.

La pendenza del fondo nell'area tra la battigia e le barre è dell'1,1% mentre al di là della fascia delle barre è di poco inferiore all'1%.

I profili batimetrici effettuati nel corso della seconda campagna

mostrano accentuate variazioni nella morfologia e nei volumi di materiali rimossi. In particolare (Fig. 9) si assiste ad una migrazione verso il largo delle barre le quali risultano ubicate rispettivamente ad una distanza dalla riva compresa tra 80 e 200 m (barra interna) e tra 250 e 350 m (barra esterna); la profondità del truogolo rimane costante (3.5/5.5 m).

Per quanto riguarda le variazioni volumetriche in corrispondenza dei profili n° 5, 7 e 8 si osserva un incremento compreso tra 50 e 400 mc per metro lineare di costa, mentre in corrispondenza dei profili n° 4 e 6 si osservano lievi diminuzioni (dell'ordine delle decine di mc).

L'analisi tessiturale dei campioni di spiaggia sottomarina ha consentito di calcolare i parametri sedimentologici significativi.

La distribuzione areale del diametro medio evidenzia la presenza di fasce a diversa granulometria disposte grossomodo parallelamente alla costa (Fig. 10).

In particolare tra la battigia e la batimetrica di -3 m, sono presenti sabbie medio-fini in quasi tutta l'area di litorale tranne che in corrispondenza del Lago dei Monaci (profilo 5, con sabbie fini) e del Lago di Paola (profilo 12, con sabbie medio-fini oltre -6 m). Seguono sabbie fini presenti sino a profondità di -10 m tranne che in corrispondenza del profilo n° 1 dove il limite con le sabbie molto fini è ubicato a -5 m e dei profili 2 e 12 dove esse sono presenti fino alle profondità di -10 m.

Da notare che nell'area prospiciente il Lago dei Monaci, a forte erosione, la spiaggia sottomarina presenta abbondanza di materiali sottili (sabbie fini e molto fini) provenienti sicuramente dallo smantellamento del cordone dunare.

Anche per i sedimenti della spiaggia sottomarina è stato possibile mettere in evidenza una diminuzione del diametro medio all'altezza del L. di Coprolace, rispetto alla zona del Lago di Fogliano (a nord) e del Lago di Paola (a sud).

Dal punto di vista dell'assortimento i sedimenti presentano valori di σ_T compresi tra 0.16ϕ e 0.67ϕ , procedendo dalla battigia verso le maggiori profondità, ad indicare un graduale passaggio da sedimenti molto ben classati a moderatamente ben classati.

La Fig. 11 illustra il confronto tra i valori del diametro medio e dell'assortimento per i campioni prelevati alle varie profondità. Come è lecito attendersi i campioni di battigia si presentano addensati mostrando scarsa variabilità; al contrario tutti gli altri evidenziano un'ampia dispersione in special modo nei valori dell'assortimento.

Anche i valori del coefficiente di asimmetria (SK_T) e di curtosi (K_G) variano gradualmente procedendo dalla battigia verso il largo rispettivamente da

+/- 0.1 (quasi simmetrici) a -1.5 (fortemente asimmetrici grossolani) e da 1.6 a 3.4 (da molto a estremamente leptocurtici).

Dinamica litoranea

Da indagini effettuate mediante traccianti artificiali di fondo (sea bed drifters) è stata riscontrata una deriva litorale verso SE in periodo primaverile e verso NW in periodo autunnale.

In particolare nel corso della campagna primaverile (10 maggio 1982) la percentuale di traccianti recuperati direttamente o segnalati dal personale del Parco Nazionale e della locale Stazione dei Carabinieri è stata la seguente (su un totale di 150 traccianti immessi a -3, -6 e -9 m):

- 90% per i traccianti di -3 m, recuperati quasi totalmente 24 ore dopo l'immissione ad una distanza compresa tra 1.5 e 2.3 Km a sud della zona di immissione ubicata in corrispondenza del profilo 6 (tre di essi sono stati segnalati al 14° e 18° giorno rispettivamente ad una distanza di 7 e 2 Km);
- 80% per i traccianti di -6 m recuperati dopo 24 ore ad una distanza compresa tra 1 e 1.5 Km a sud del profilo 6;
- 40% per i traccianti di -9 m dei quali 5 recuperati, sempre a sud, dopo 24 ore ad una distanza di 1.5 Km, 4 al quinto giorno ad una distanza compresa tra 1.3 e 2.3 Km e 7 segnalati tra il 14° ed il 15° giorno rispettivamente ad una distanza di 5 e 2.7 Km.

Una così alta percentuale, riscontrata nei giorni immediatamente successivi all'immissione, si deve imputare essenzialmente alle condizioni meteomarine; infatti spirava un vento di maestro-ponente con intensità pari a 12 nodi e si registrava un mare proveniente da libeccio-ponente con altezza d'onda di oltre 1 m e periodo di 6 sec.

Il recupero dei traccianti esclusivamente nelle aree a sud dell'immissione è dovuto alla corrente longitudinale generata all'atto del frangimento.

Nel corso della seconda campagna (ottobre 1982) è stata ottenuta una significativa percentuale di recuperi solo per i traccianti di -3 m: 50% tra il 1° ed il 3° giorno ad una distanza compresa tra 1.75 e 2.5 Km, a nord del punto di immissione. Per i traccianti di -6 m la percentuale è pari al 10% con recuperi dopo 2 giorni ad una distanza compresa tra 2 e 2.3 Km sempre a nord del punto di immissione. Nessun tracciante della profondità di -9 m è stato recuperato.

Durante la campagna si osservava un debole moto ondoso proveniente da mezzogiorno e calma di vento.

Le indagini sperimentali effettuate con i traccianti confermano quanto evidenziato dalla diminuzione dei valori del diametro medio dei sedimenti di

battigia e di spiaggia sottomarina procedendo dalla zona del Lago di Fogliano (a nord) e dalla zona di T.re Paola (a sud) verso la zona del Lago di Caprolace (area centrale del settore).

Da ricordare inoltre le evidenze morfologiche ai lati delle opere di sistemazione delle foci dei canali di bonifica afferenti al litorale: infatti mentre nel tratto centro-settentrionale si osserva ripascimento in destra foce (sopraflutto) ed erosione in sinistra (sottoflutto), nel tratto meridionale si osserva ripascimento in sinistra ed erosione in destra.

L'esistenza dei due drift è in perfetto accordo con quanto rilevato recentemente da GANDOLFI e PAGANELLI (1984). Questi Autori in base alla distribuzione dei minerali riconoscono un debole movimento delle sabbie verso Sud tra Foce Verde e Foce Rio Martino (tra L. di Fogliano e L. dei Monaci -associazione ad augite e subordinato granato con melanite ed ultrastabili, prevalenza di quarzo nella frazione leggera) ed un drift verso Nord dal Promontorio del Circeo a Rio Martino (maggiore quantità di augite e minore di granato, melanite ed ultrastabili, elevati contenuti di quarzo e subordinatamente di carbonati e feldspati).

Tendenza evolutiva del litorale

Per quanto riguarda le variazioni della linea di riva intervenute nell'ultimo secolo si è potuto disporre esclusivamente delle carte topografiche dell'IGM del 1878 e del 1928/1936 (edito nel 1954), di una levata aerofotografica risalente al 1970, messa a disposizione dalla Direzione del Parco Nazionale del Circeo e dei rilievi eseguiti direttamente nel 1982/83.

Considerando l'intero arco di litorale tra T.re Astura e Capo Circeo dal confronto cartografico si può osservare un notevole arretramento della linea di riva nel settore compreso tra T.re Astura e Foce Verde -con valori intorno a 2 m/anno negli ultimi 100 anni- ed un'evoluzione alquanto differenziata nel settore litoraneo del Parco Nazionale (tra Foce Verde e T.re Paola).

In quest'ultimo infatti si assiste ad un protendimento generalizzato nel periodo 1878/1928-36 -con valori tra 1 e 2 m/anno- fatta eccezione per l'area immediatamente a nord del Lago di Sabaudia, sostanzialmente stabile. Dal 1928-36 al 1970 si osserva un avanzamento tra Foce Verde ed il Lago di Fogliano (con valori intorno ad 1 m/anno) ed un arretramento nell'area compresa tra il Lago dei Monaci ed il Lago di Caprolace (con valori di circa 0,5 m/anno). Permane stabile l'area antistante il Lago di Fogliano e quella immediatamente a nord del Lago di Sabaudia, mentre nell'area antistante quest'ultimo si alternano tratti a debole avanzamento o arretramento.

Attualmente gran parte del litorale del Parco Nazionale risulta soggetta a fenomeni erosivi evidenziati a luoghi da scarpate subverticali incise

nel cordone dunare: i valori di arretramento del piede duna calcolati nel periodo ottobre 1982/giugno 1983 risultano di 1.5 m all'altezza del Lago di Fogliano (v. Fig. 3), di 4 m in corrispondenza del Lago di Caprolace (Fig. 12) e di 5.5 m nel settore centrale del Lago di Sabaudia (Fig. 13).

Come già accennato precedentemente in corrispondenza del Lago dei Monaci l'erosione della duna per scalzamento al piede, ha causato il franamento della strada litoranea impostata sulla duna stessa (v. Fig. 4). Poichè in tale zona il cordone ha altezza ed ampiezza limitata si viene a configurare una reale situazione di pericolo rappresentato, in concomitanza di mareggiate di estrema violenza, da apertura di eventuali varchi nel cordone dunare e conseguente ingresso di acque marine nelle aree lacustri retrostanti con disastrose conseguenze sull'equilibrio dell'ambiente.

Per quanto riguarda i fattori evolutivi si può affermare che l'arretramento della zona settentrionale (T.re Astura - Foce Verde) nel periodo 1878/1928-36 è imputabile ad un deficit di sedimenti sabbiosi causato dalla costruzione del porto di Anzio il quale avrebbe agito da pennello intercettatore dei materiali trasportati da nord (F. Tevere) ad opera della corrente lungocosta come testimoniato dal continuo interrimento dovuto ai fenomeni di diffrazione alla testata del molo del moto ondoso proveniente da ponente-maestro.

Il protendimento del settore a sud di Foce Verde (litorale del Parco Nazionale del Circeo) nel periodo citato può essere attribuito verosimilmente all'azione di by pass di Torre Astura da parte dei materiali provenienti da nord e subordinatamente all'accumulo dei materiali provenienti dallo smantellamento della falesia del Promontorio del Circeo convogliati dalla corrente litoranea diretta verso nord. Infine da considerare il contributo solido del F. Astura e del Moscarello e quello seppur modesto dei canali di bonifica, congiuntamente ad una probabile redistribuzione dei materiali erosi dalla stessa area di Torre Astura-Foce Verde.

A partire dal 1936, il prolungamento del molo del porto di Anzio e la costruzione del porto di Nettuno esaltano il deficit di materiale litoraneo provocando un rallentamento del fenomeno di progradazione o addirittura una inversione della tendenza nelle aree del Parco Nazionale: permane nelle estreme zone meridionali il debole contributo clastico da parte del promontorio del Circeo.

L'attuale tendenza all'erosione dell'intero settore del Parco Nazionale va attribuita oltre che ai già citati fenomeni di riduzione degli apporti solidi dalle zone più settentrionali, anche alla intensa urbanizzazione della fascia litoranea (costruzione di villini, alberghi e ristoranti sul cordone dunare, realizzazione di innumerevoli accessi al mare) e alla stessa attività di balneazione (si calcola che mediamente ciascun bagnante "asporti" dalla spiaggia

500 gr di materiale sabbioso al giorno).

BIBLIOGRAFIA

- AMORE C., COCCO E., de MAGISTRIS M.A., DE PIPPO T. & GIUFFRIDA E. (1978) - Variazioni morfologiche e quantitative della spiaggia emersa e sommersa dell'area campane Alto Ionio (Golfo di Taranto). Boll. delle sedute Acc. Gioenia di Sc. Nat. in Catania. Serie IV, Vol. XIV, Fasc. 1°.
- COCCO E. (1975) - Forme costiere ritmiche (Sand waves) lungo il litorale Alto Ionico. Boll. Soc. Geol. It. 94, 861-869.
- CAPUTO C., D'ALESSANDRO L., LA MONICA G.B., LANDINI B., LUPIA PALMIERI E. & PUGLIESE F. (1982) - Erosion problems on the Coast of Lazio, Italy. Proceedings of a Symposium held in Venice 10-14 May 1982.
- EVANGELISTA S., LA MONICA G.B. & LANDINI B. (1982). - Antropizzazione e conservazione dei litorali. L'arco sabbioso Circeo-Terracina. In Bioclimatologia Marina e talassoterapia, Collana di Bioclimatologia e Climatologia medica, in corso di stampa.
- DAL CIN R. (1983) - I litorali del delta del Po e alle foci dell'Adige e del Brenta: caratteri tessiturali e dispersione dei sedimenti, cause dell'arretramento e previsioni sull'evoluzione futura. Boll. Soc. Geol. It., 102, 9-56.
- GANDOLFI G. & PAGANELLI L. (1984) - Petrografia delle sabbie del litorale tirrenico fra i Monti dell'Uccellina e Monte di Procida. Miner. Petrogr. Acta, Vol. XXVIII, 173-191.
- GISOTTI G., QUOIANI M. & RUSSI A. (1982) - Il paesaggio geologico del Parco Nazionale del Circeo. Ed. Min. Agr. e For. - Parco Nazionale del Circeo

TABELLA 1

	media dev. stand. cartosi assem.			media dev. stand. cartosi assem.		
P ₁	duna	2.80	0.130	1.95	-0.035	
	spiaggia	2.46	0.176	1.03	-0.088	
	battigia	2.18	0.213	1.78	-0.238	
P ₂	duna	-	-	-	-	
	spiaggia	2.59	0.190	1.99	-0.035	
	battigia	2.07	0.349	2.06	-0.490	
P ₃	duna	2.58	0.081	1.92	-0.185	
	spiaggia	2.65	0.092	2.15	-0.490	
	battigia	2.10	0.183	1.60	-0.070	
P ₄	duna	-	-	-	-	
	spiaggia	2.67	0.102	2.27	-0.071	
	battigia	2.20	0.117	1.69	-0.0006	
P ₅	duna	2.53	0.144	1.90	-0.180	
	spiaggia	2.63	0.131	1.88	-0.332	
	battigia	2.33	0.160	1.65	0.224	
P ₆	duna	-	-	-	-	
	spiaggia	2.72	0.088	2.29	-0.153	
	battigia	2.23	0.109	1.51	-0.005	
P ₇	duna	2.84	0.215	2.43	0.484	
	spiaggia	2.82	0.407	3.39	1.313	
	battigia	2.32	0.190	1.64	0.087	
P ₈	duna	-	-	-	-	
	spiaggia	2.36	0.210	1.67	-0.046	
	battigia	2.11	0.215	1.05	0.468	
P ₉	duna	2.30	0.189	1.60	-0.206	
	spiaggia	2.54	0.174	1.77	0.011	
	battigia	2.04	0.384	1.77	-0.322	
P ₁₀	duna	-	-	-	-	
	spiaggia	2.03	0.202	1.74	0.206	
	battigia	1.95	0.176	1.07	0.032	
P ₁₁	duna	1.99	0.220	1.93	0.251	
	spiaggia	1.90	0.192	1.78	0.173	
	battigia	1.93	0.215	1.83	0.200	
P ₁₂	duna	-	-	-	-	
	spiaggia	1.71	0.123	1.94	0.182	
	battigia	1.27	0.129	1.79	-0.096	

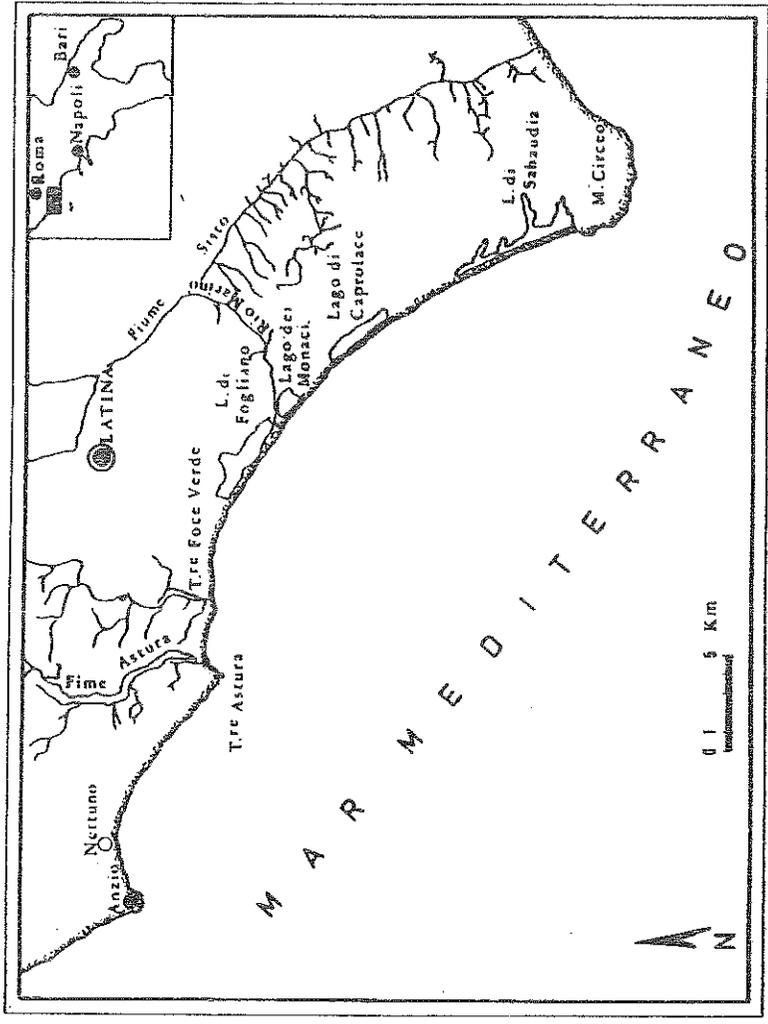


Fig.1 Localizzazione dell'area in studio.

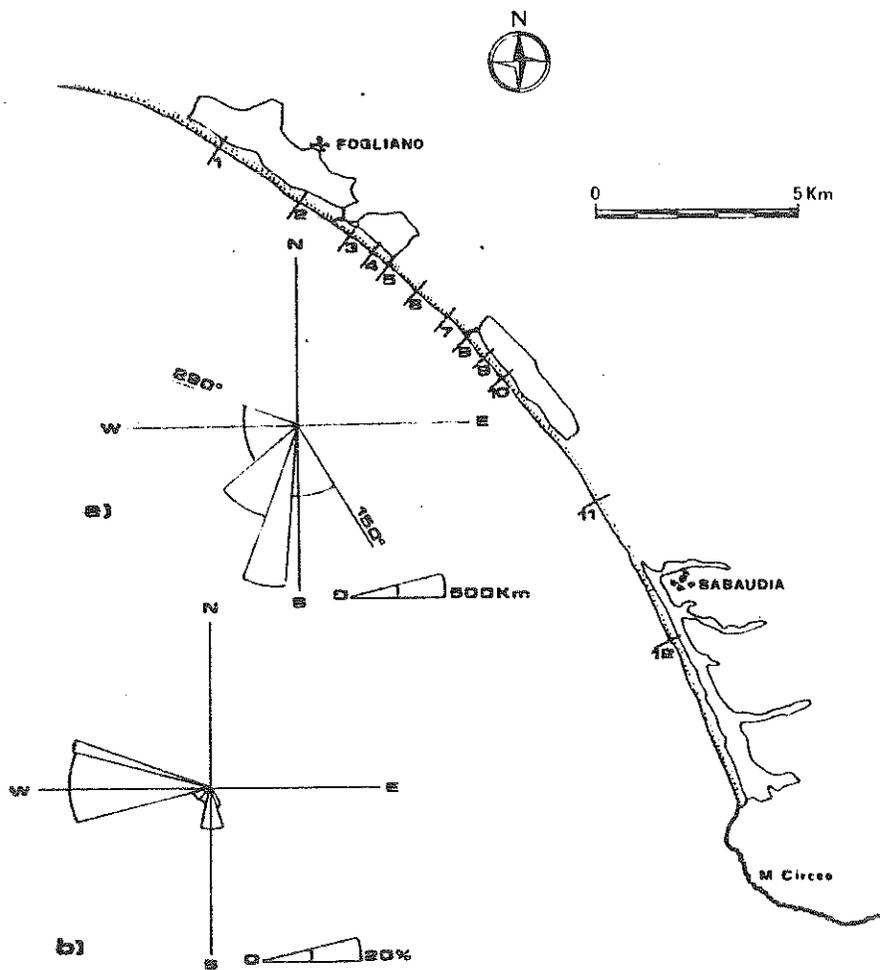


Fig.2 a) settore di traversia e fetchs relativi all'area in studio;
 b) frequenze di apparizione degli eventi meteomarinii;
 1/12 - tracce dei profili topografici e batimetrici.

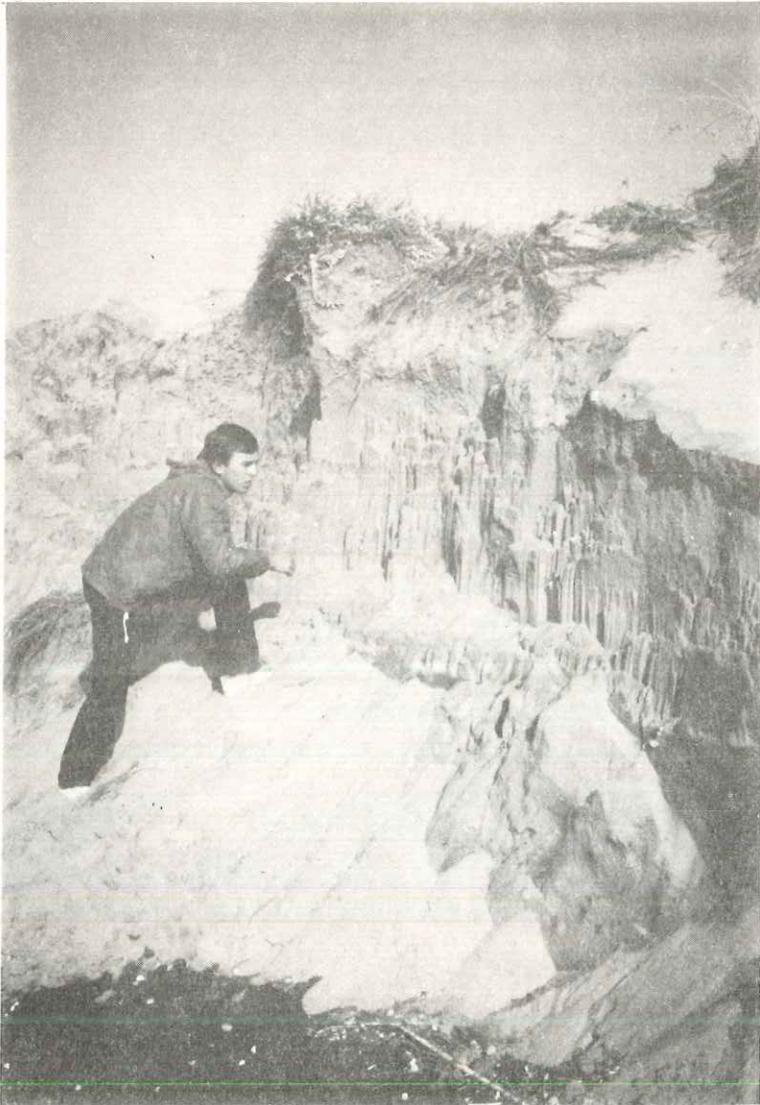


Fig.3 Scarpata di erosione incisa nel cordone dunare. Località Lago di Fogliano.



Fig.4 Frana della strada litoranea impostata sul cordone dunare. Località Lago dei Monaci.

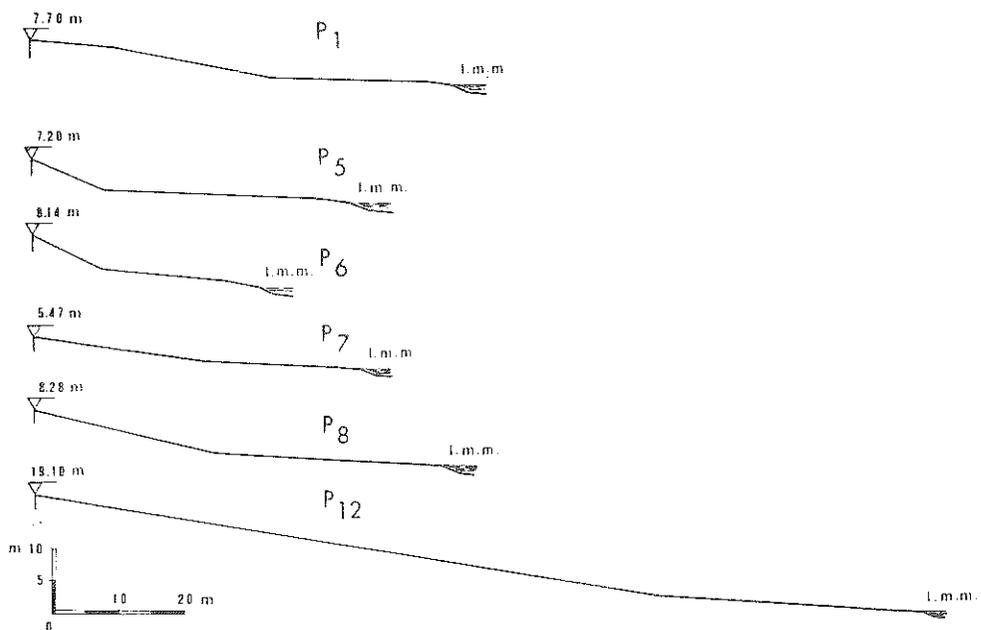


Fig.5 Profili topografici della spiaggia emersa.

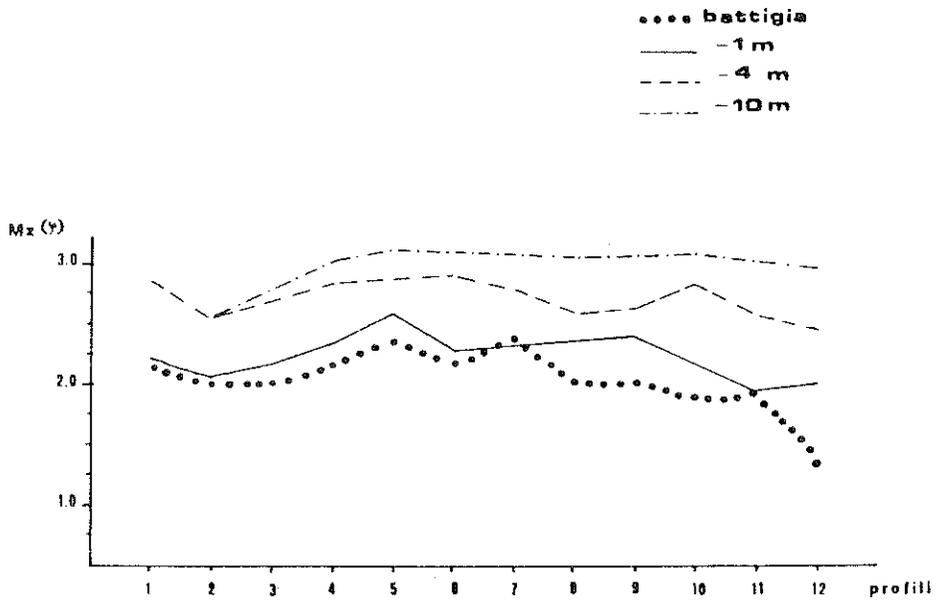


Fig.6 Variazione del diametro medio in corrispondenza dei profili topografici e batimetrici.

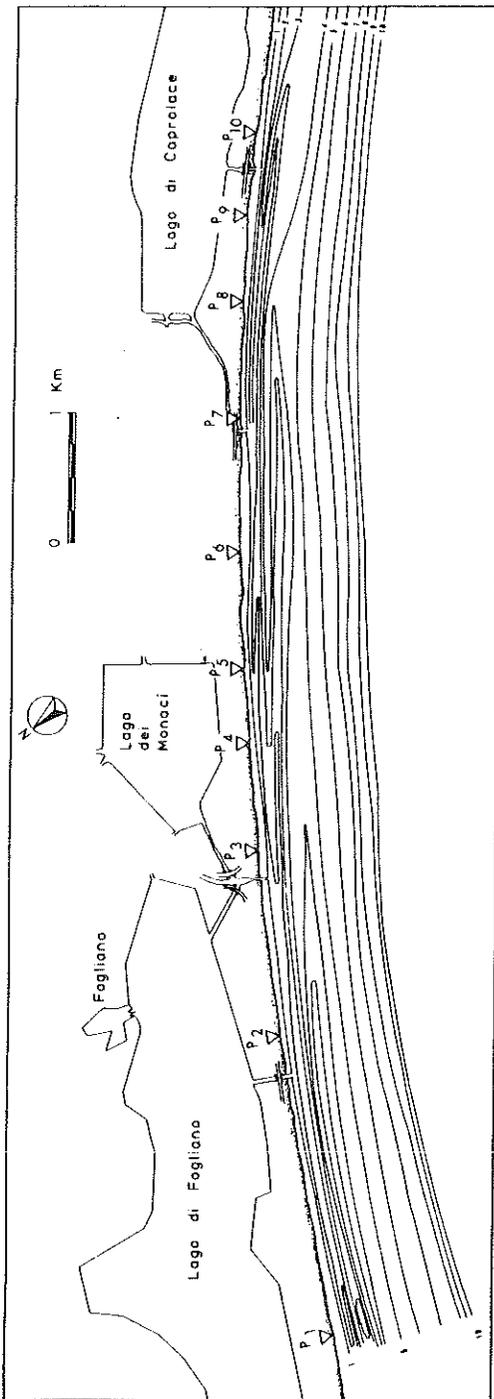


Fig.7 Carta batimetrica dell'area in esame.

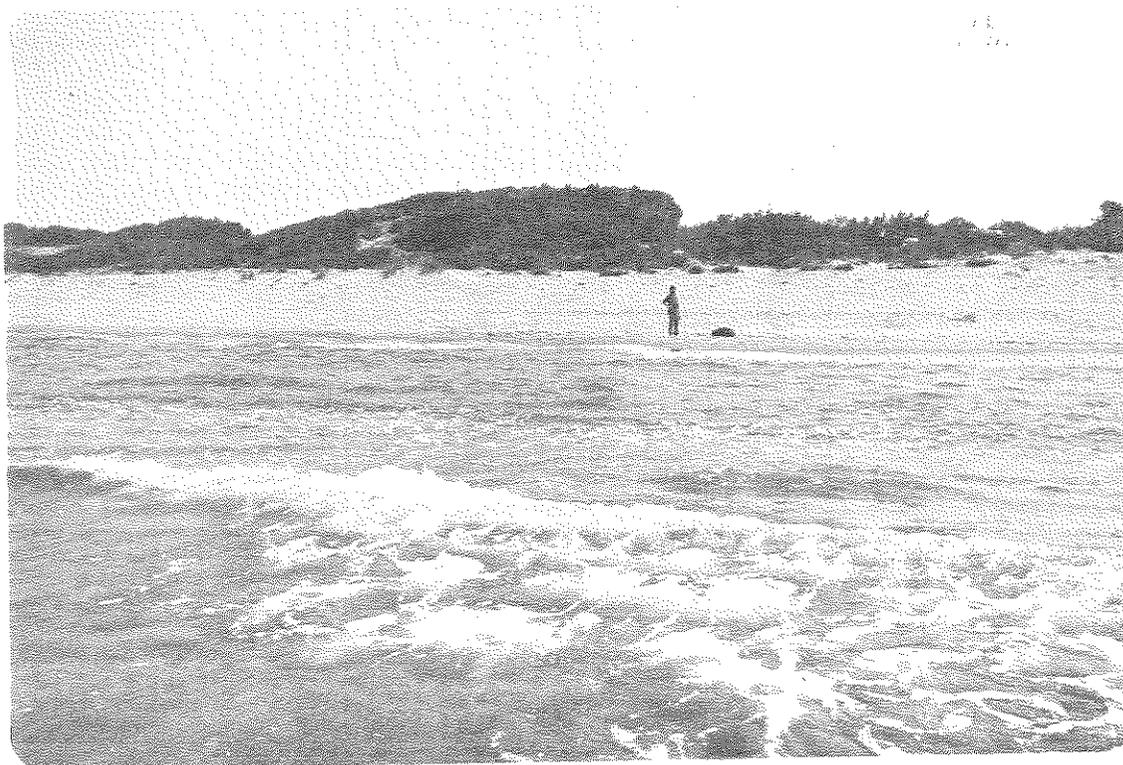


Fig.8 Barra di 1° ordine che tende a saldarsi alla battigia. Località a nord del Lago di Sabaudia.

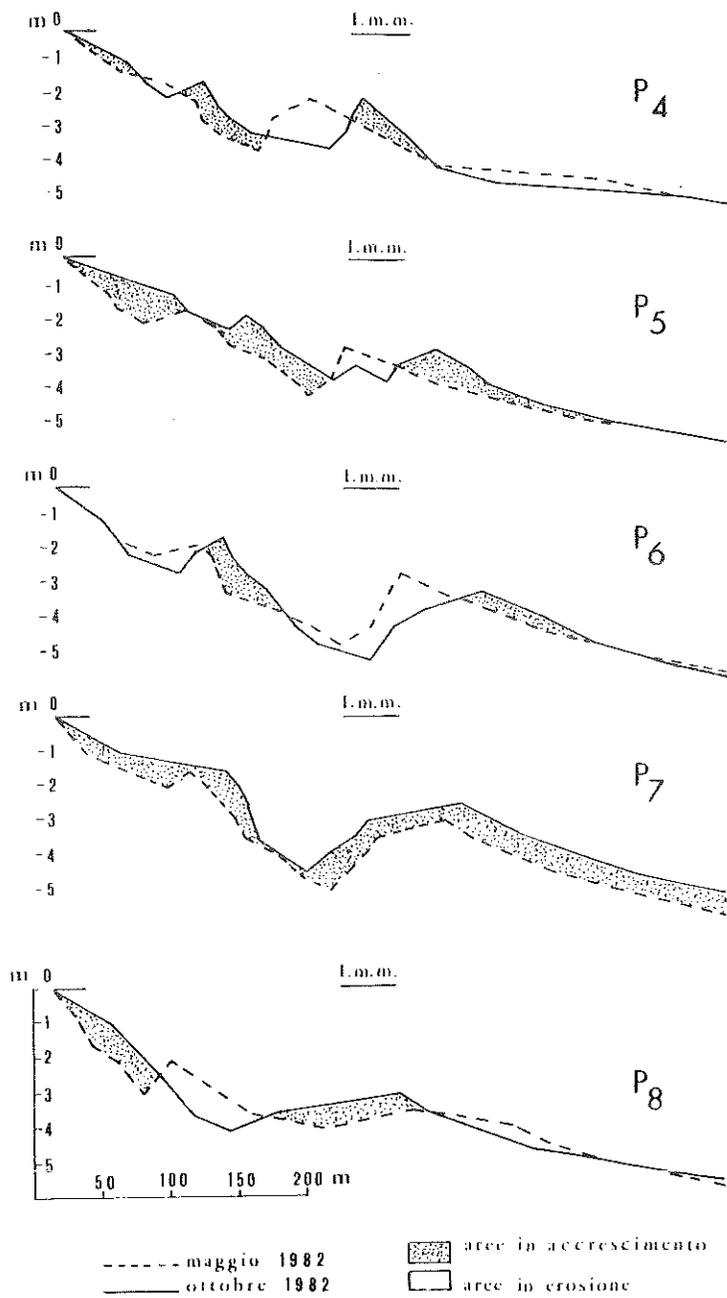


Fig.9 Confronto tra i profili batimetrici della zona compresa tra il Lago dei Monaci ed il Lago di Caprolace.

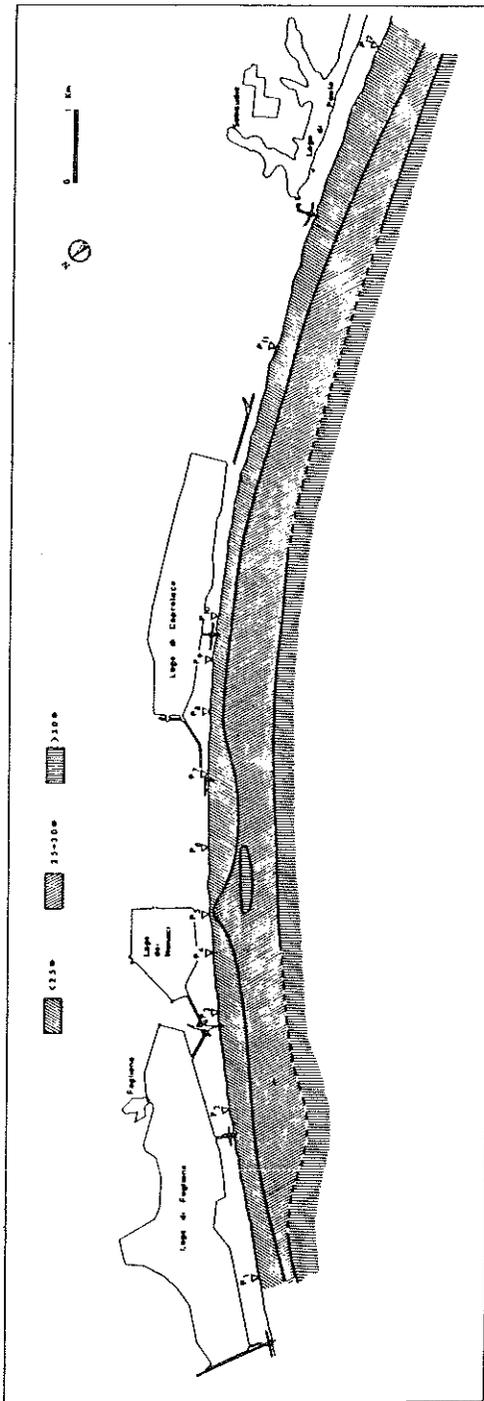


Fig.10 Carta della distribuzione dei sedimenti in funzione del diametro medio (Mz).

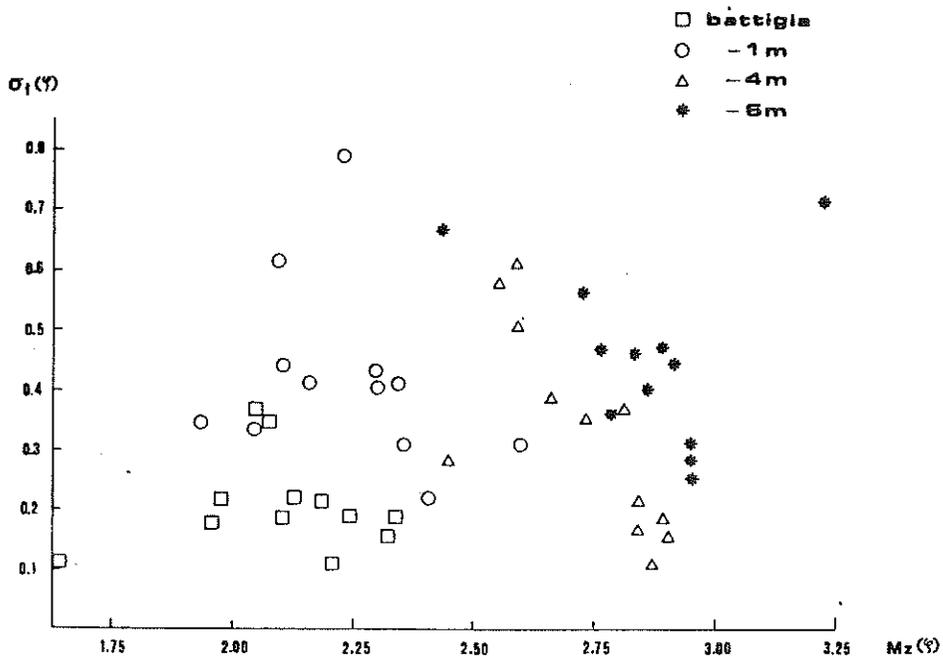


Fig.11 Confronto tra valori di Mz (diametro medio) e σ_I (assortimento) per i campioni prelevati in battigia e a varie profondità.



Fig.12 Erosione della duna all'altezza del Lago di Caprolace. Da notare in primo piano un varco originato dal mare di tempesta (over wash).



Fig.13 Erosione litoranea nell'area del Lago di Sabaudia. Da notare i varchi del mare di tempesta facilitati dalle opere di urbanizzazione.

MEDIE DI TIPO JENSEN IN SPAZI DI ORLICZ

Nota di Bianca Stroffolini (*)

Presentata dal Socio Carlo Sbordone

Adunanza del 7 febbraio, 1987

Riassunto. E' provata un'equivalenza tra norma di Orlicz e media di tipo Jensen.

Abstract. An equivalence between Orlicz norm and Jensen mean is proved.

§ 1. Introduzione

Se $A = A(t)$ è una funzione di Young verificante la condizione Δ_2 (vedi §1), si può considerare lo spazio di Orlicz $L_A(\Omega)$ costituito dalle classi di equivalenza (modulo l'uguaglianza quasi ovunque) delle funzioni misurabili u definite in Ω tali che

$$\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx < \infty$$

ove Ω è un aperto limitato di \mathbb{R}^n [5].

Tale spazio può essere munito delle due norme equivalenti :

$$\|u\| = \inf \left\{ \lambda > 0 : \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} A\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}$$

$$\|u\|' = \sup \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right\}$$

ove l'estremo superiore è preso sulle $v \in L_{\bar{A}}(\Omega)$, tali che

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \bar{A}(|v(x)|) dx \leq 1$$

e \bar{A} è la complementare di Young di A (ved. § 1).

Scopo di questa nota è di dare una condizione necessaria e sufficiente su A affinché la media di tipo Jensen

$$\mathcal{M}_{\lambda}^A(u) = A^{-1} \left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} A(|u(x)|) dx \right)$$

(*) Borsista dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica anno accademico 1986-87.

sia un funzionale su $L^A(\Omega)$ equivalente a $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ (teor 1).
Tale questione è motivata dai recenti articoli: [2], [4].

§ 1 PREMESSE

Sia $A: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ verificante:

- (i) $A(t) \neq 0$ $A(t) \neq \infty$ $A(0) = 0$
- (ii) $A(t)$ continua, convessa, strettamente crescente.

Tale funzione $A(t)$ è chiamata funzione di Young.

Per $t \in [0, \infty)$ posto

$$\bar{A}(t) = \sup_{s \geq 0} (st - A(s))$$

$A(t)$ è chiamata complementare di Young di A.

E' facile vedere che

$$t \leq A^{-1}(t) \quad \bar{A}^{-1}(t) \leq 2t \quad 0 \leq t < \infty$$

Se $A(t)$ soddisfa anche le condizioni

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{A(t)}{t} = 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{A(t)}{t} = \infty$$

essa viene chiamata N-funzione, secondo la terminologia di Krasnoseiskii-Rutickii [5].

Sia $A(t)$ una funzione di Young, Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n .

Diremo classe di Orlicz $K_A(\Omega)$ l'insieme di tutte le classi di equivalenza modulo l'uguaglianza quasi ovunque in Ω delle funzioni misurabili u definite in Ω e soddisfacenti:

$$\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx < \infty$$

Poichè A è convessa, $K_A(\Omega)$ è un insieme convesso, ma potrebbe non essere uno spazio vettoriale; per esempio, potrebbe esistere $u \in K_A(\Omega)$ e $\lambda > 1$ tali che $\lambda u \notin K_A(\Omega)$.

A tale proposito si introduce la condizione Δ_2

Definizione. Si dice che una funzione di Young $A(t)$ soddisfa la condizione Δ_2 se esiste una costante $K > 0$ e $t_0 > 0$ tali che $A(2t) \leq K A(t)$ per ogni $t \geq t_0$.

Si dimostra infatti che $K_A(\Omega)$ è uno spazio vettoriale se e solo se A soddisfa la condizione Δ_2 .

Lo spazio di Orlicz $L_A(\Omega)$ è definito come l'involuppo lineare della classe di Orlicz $K_A(\Omega)$

Il funzionale

$$\|u\|_A = \inf \{ \lambda > 0 : \int_{\Omega} A\left(\frac{|u(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \} \quad (*)$$

$$(*) \quad \text{ove} \quad \int_{\Omega} f = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega}$$

è una norma su L_A (è chiamata norma di Luxembour).

$L_A(\Omega)$ è uno spazio di Banach rispetto a tale norma.

Osserviamo che se A è una funzione di Young e \bar{A} la sua complementare, allora vale la (disuguaglianza di Young):

$$ts \leq A(t) + \bar{A}(s)$$

Da qui segue una generalizzazione della disuguaglianza di Hölder:

$$\int_{\Omega} |u(x) v(x)| dx \leq 2 \|u\|_A \|v\|_{\bar{A}}$$

Siano $A(t)$ e $\bar{A}(s)$ due funzioni di Young complementari e sia $v \in L_{\bar{A}}(\Omega)$ fissata, dalla disuguaglianza precedente segue che:

$$I(u) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx < \infty \quad \forall u \in L_A(\Omega)$$

e quindi I definisce un funzionale lineare su $L_A(\Omega)$.

Inoltre si prova che:

$$\|u\|' = \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) v(x) dx \right\}$$

sulle $v \in L_{\bar{A}}(\Omega)$ tali che $\int_{\Omega} \bar{A}(|v(x)|) dx \leq 1$ soddisfa la proprietà di norma (norma di Orlicz).

Si ha la seguente relazione:

$$\|u\|_A \leq \|u\|' \leq 2 \|u\|_A$$

cioè la norma di Orlicz e la norma di Luxembourg sono tra loro equivalenti e quindi inducono la stessa topologia su $L_A(\Omega)$.

Inoltre risulta

$$(1) \quad \int_{\Omega} A\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|}\right) dx \leq 1$$

e si ha l'uguaglianza se A verifica la Δ_2 .

Consideriamo la N-funzione $\vartheta(t) = t^2 \log(1+t)$; vogliamo provare che per essa non si ha l'equivalenza tra media di Jensen \mathcal{M}_{ϑ} e media di Orlicz; più precisamente faremo vedere che $\mathcal{M}_{\vartheta}(\lambda, \cdot)$ non è equivalente a $\lambda \mathcal{M}_{\vartheta}(\cdot)$, [3].

Sia per $x \in (0, \frac{1}{2})$

$$u(x) = \frac{1}{(x \log^3 x)^{\frac{1}{2}}}$$

allora è

$$a = \int_0^{\frac{1}{2}} u^2 \log(1+u) dx < \infty, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} u^3 dx = +\infty.$$

$$\text{Posto } u_M(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } u(x) < M \\ 0 & \text{se } u(x) > M \end{cases}$$

supponiamo che esista una costante $c > 0$, tale che, $\forall \lambda > 0$ e $\forall M > 0$ sia

$$\vartheta^{-1} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \vartheta(\lambda u_M(x)) dx \right) \leq c \lambda \vartheta^{-1} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \vartheta(u_M(x)) dx \right)$$

ovvero, posto

$$a_M = \int_0^{\frac{1}{2}} u_M^2 \log(1+u_M) dx,$$

che sia $\forall \lambda$ e $\forall M$

$$(2) \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{u_M^2 \log(1 + \lambda u_M)}{\lambda} dx \leq c^2 \frac{a_M^2 \log(1 + c \lambda a_M)}{\lambda}.$$

Passando al limite nella (1) per $\lambda \rightarrow 0^+$ si ha facilmente:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} u_M^3 dx \leq c^3 a_M^3 \leq c^3 a^3.$$

Passando al limite per $M \rightarrow \infty$ si ha l'assurdo.

§2.

Sia $A(t)$ una funzione di Young, in particolare essa è convessa e quindi verifica la disuguaglianza di Jensen:

$$A\left(\int_{\Omega} |u(x)| dx\right) \leq \int_{\Omega} A(|u(x)|) dx$$

Essendo A invertibile con inversa A^{-1}

$$\int_{\Omega} |u(x)| dx \leq A^{-1} \left(\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx \right)$$

Sembra naturale allora considerare una media di tipo Jensen:

$$\mathcal{M}_A(u) = A^{-1} \left(\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx \right)$$

e porsi il problema di vedere quando essa è equivalente alla norma di Luxembourg.

Vale il seguente risultato:

Teorema 1. Sia $A: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una funzione di Young verificante la condizione Δ^2 e tale che $A(1) = 1$, sia Ω un aperto limitato di \mathbb{R}^n . Allora, le seguenti condizioni sono tra loro equivalenti:

(i) Esistono $K_0, K_1 > 0$ tali che $\forall s \geq 1$ e $t > 0$

$$(3) \quad A(K_0 st) \leq A(s) A(t) \leq A(K_1 st)$$

(ii) Esistono $c_0, c_1 > 0$ tali che

$$(4) \quad c_0 \| |u| \|_{L_A(\Omega)} \leq A^{-1} \left(\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx \right) \leq c_1 \| |u| \|_{L_A(\Omega)}$$

Osservazione 1. Se $u(x) \in L_A(\Omega)$ è la funzione caratteristica di un insieme misurabile $E \subset \Omega$ e se $\alpha > 0$, allora si ha facilmente:

$$\| \alpha u \|_{L_A} = \frac{\alpha}{A^{-1} \left(\frac{|\Omega|}{|E|} \right)} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}_A(\alpha u) = A^{-1} \left(A(\alpha) \frac{|E|}{|\Omega|} \right)$$

Dimostrazione. (ii) \Rightarrow (i) Siano $s \geq 1$ e $t > 0$; sia $E \subset \Omega$ tale che

$$A(s) = \frac{|\Omega|}{|E|}$$

Sia $\alpha = st$ e poniamo $u(x) = \alpha \chi_E(x)$ nella (4).

Allora, tenendo conto dell'osservazione 1, si ha:

$$\frac{c_0 \alpha}{A^{-1} \left(\frac{|\Omega|}{|E|} \right)} \leq A^{-1} \left(A(\alpha) \frac{|E|}{|\Omega|} \right) \leq \frac{c_1 \alpha}{A^{-1} \left(\frac{|\Omega|}{|E|} \right)}$$

ovvero, per le posizioni fatte:

$$\frac{c_0 st}{s} \leq A^{-1} \left(\frac{A(st)}{A(s)} \right) \leq \frac{c_1 st}{s}$$

e ciò implica subito la (3) con $K_0 = \frac{1}{c_1}$ $K_1 = \frac{1}{c_0}$

(i) \Rightarrow (ii) Proviamo che la condizione

$$(5) \quad A(K_0 st) \leq A(s) A(t) \quad \forall s \geq 1 \quad \forall t > 0$$

implica

$$A^{-1} \left(\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx \right) \leq c_1 \| |u| \|_{L_A}$$

Possiamo supporre $\|u\| \neq 0$, altrimenti la disuguaglianza segue facilmente.

Poniamo $\Omega' = \{x \in \Omega : \frac{|u(x)|}{\|u\|} \geq 1\}$ allora si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A(|u(x)|) dx &= \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega'} A(|u(x)|) dx + \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega - \Omega'} A(|u(x)|) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega'} A(k_0 \frac{\|u\|}{k_0} \frac{|u(x)|}{\|u\|}) dx + \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega - \Omega'} A(|u(x)|) dx \leq \\ &\leq \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega} A(\frac{\|u\|}{k_0}) A(\frac{|u(x)|}{\|u\|}) dx + \frac{1}{\|\Omega\|} \int_{\Omega - \Omega'} A(|u(x)|) dx \end{aligned}$$

per la 5).

Osserviamo che se $x \in \Omega - \Omega'$ $A(|u(x)|) \leq A(\|u\|)$ pertanto segue che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A(|u(x)|) dx &\leq \frac{A(\frac{\|u\|}{k_0})}{k_0} \int_{\Omega} A(\frac{|u(x)|}{\|u\|}) dx + \frac{|\Omega - \Omega'|}{\|\Omega\|} A(\|u\|) \leq \\ &\leq \frac{A(\frac{\|u\|}{k_0})}{k_0} + A(\|u\|) \leq A(\frac{\|u\|}{k_0} + \|u\|) . \end{aligned}$$

Infatti per ogni N-funzione e per ogni s, t

$$A(s) + A(t) \leq A(s+t)$$

Indichiamo con $a(x)$ la derivata di $A(x)$; essendo a crescente si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^t a(x) dx &\leq \int_s^{s+t} a(x) dx \quad \text{per cui} \\ A(s) + A(t) &= \int_0^s a(x) dx + \int_0^t a(x) dx \leq \int_0^s a(x) dx + \int_s^{s+t} a(x) dx = \\ &= \int_0^{s+t} a(x) dx = A(s+t) \end{aligned}$$

In definitiva si ha:

$$A^{-1} \left(\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx \right) \leq \left(1 + \frac{1}{k_0} \right) \|u\|$$

Osservazione 2. Osserviamo che da $A(K_0 s t) \leq A(s) A(t) \leq A(K_1 s t)$ segue facilmente che

$$A(K_0) \leq A(t) A\left(\frac{1}{t}\right) \leq A(K_1) \quad \forall t > 0$$

Proviamo che la condizione $A(K_0 s t) \leq A(s) A(t) \leq A(K_1 s t) \quad \forall s \geq 1 \quad \forall t > 0$ implica

$$c_0 \| |u| \|_{L_A} \leq A^{-1} \left(\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx \right)$$

Distinguiamo due casi:

$$1) \quad \| |u| \|_{L_A} \geq K_1$$

$$2) \quad \| |u| \|_{L_A} \leq K_1$$

1° caso)

Scegliamo $s = \frac{\| |u| \|}{K_1}$ e $t = \frac{|u(x)|}{\| |u| \|}$; allora dalla (3) segue:

$$A(|u(x)|) = A \left(K_1 \frac{|u(x)|}{\| |u| \|} \frac{\| |u| \|}{K_1} \right) \geq A \left(\frac{\| |u| \|}{K_1} \right) A \left(\frac{|u(x)|}{\| |u| \|} \right)$$

Passando alle medie su Ω si ha:

$$\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx \geq A \left(\frac{\| |u| \|}{K_1} \right) \int_{\Omega} A \left(\frac{|u(x)|}{\| |u| \|} \right) dx = A \left(\frac{\| |u| \|}{K_1} \right) \quad \text{per 1a-(2)}$$

$$\text{da cui } A^{-1} \left(\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx \right) \geq \frac{1}{K_1} \| |u| \|_{L_A}$$

2° caso)

Scegliamo $s = \frac{K_1}{\| |u| \|}$ e $t = \frac{|u(x)|}{K_0 K_1}$; allora dalla (3) segue:

$$A \left(\frac{|u(x)|}{\| |u| \|} \right) = A \left(K_0 \frac{|u(x)|}{K_0 K_1} \frac{K_1}{\| |u| \|} \right) \leq A \left(\frac{|u(x)|}{K_0 K_1} \right) A \left(\frac{K_1}{\| |u| \|} \right)$$

Osserviamo che $A \left(\frac{s}{K_0 K_1} \right) \leq K A(s) \quad \forall s > 0$

Infatti se $K_0 K_1 \geq 1$, la disuguaglianza segue dalla crescita di A ; se $K_0 K_1 \leq 1$, per la condizione Δ_2 si ha:

$$A \left(\frac{s}{K_0 K_1} \right) \leq K A(s) \quad \forall s > 0$$

Evidentemente si ha:

$$A \left(\frac{|u(x)|}{\| |u| \|} \right) \leq A(|u(x)|) A \left(\frac{K_1}{\| |u| \|} \right)$$

Passando alle medie su Ω :

$$\int_{\Omega} A\left(\frac{|u(x)|}{||u||}\right) dx \leq A\left(\frac{K_1}{||u||}\right) \int_{\Omega} A(|u(x)|) dx \leq \frac{K'}{A\left(\frac{||u||}{K_1}\right)} \int_{\Omega} A(|u(x)|) dx$$

per l'osservazione 2.

Dalla definizione di $||u||_{L_A}$ segue che

$$1 \leq \int_{\Omega} \frac{A\left(\frac{|u(x)|}{||u||}\right)}{2} dx \leq c \int_{\Omega} A\left(\frac{|u(x)|}{||u||}\right) dx \leq \frac{K''}{A\left(\frac{||u||}{K_1}\right)} \int_{\Omega} A(|u(x)|) dx$$

tenendo conto della disuguaglianza precedente.

Si ha allora:

$$A\left(\frac{||u||}{K_1}\right) \leq K'' \int_{\Omega} A(|u(x)|) dx$$

Si può supporre $K'' \geq 1$; allora essendo A convessa si ha:

$$A\left(\frac{||u||}{K''K_1}\right) \leq \frac{1}{K''} A\left(\frac{||u||}{K_1}\right) \leq \int_{\Omega} A(|u(x)|) dx$$

e quindi

$$\frac{1}{K''K_1} ||u|| \leq A^{-1}\left(\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx\right)$$

Dalla dimostrazione del teorema discende il seguente corollario che è dovuto a Wheeden [6].

Corollario 1. Se esistono K_0 e c tali che

$$A(K_0 st) \leq A(s) A(t) \quad \text{e} \quad A(t) A\left(\frac{1}{t}\right) \leq c \\ \forall s, t > 0$$

allora esistono c_0 e c_1 tali che $c_0 ||u|| \leq A^{-1}\left(\int_{\Omega} A(|u(x)|) dx\right) \leq c_1 ||u||$

Osservazione 3. Il seguente lemma è dovuto ad Andö [1].

Lemma. Siano $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ delle N -funzioni. Allora le condizioni

a) Per qualche K_0 e $t_0 > 0$

$$C(K_0 st) \leq A(t) B(s) \quad \text{per } s, t, \geq t_0$$

b) Per qualche K_1 e $t_1 > 0$

$$\bar{C}(K_1 st) \geq \bar{A}(t) \bar{B}(s) \quad \text{per } t, s \geq t_1$$

dove $\bar{A}(t)$, $\bar{B}(t)$, $\bar{C}(t)$ sono le complementari di Young di $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, sono equivalenti.

Scegliamo $A = B = C$ allora si ha:

a) Per qualche K_0 e $t_0 > 0$

$$A(K_0 st) \leq A(t) A(s) \quad \text{per } s, t \geq t_0$$

b) Per qualche K_1 e $t_1 > 0$

$$\bar{A}(K_1 st) \geq \bar{A}(t) \bar{A}(s) \quad \text{per } s, t \geq t_1$$

Pertanto dal teorema 1, si conclude che:

l'equivalenza tra norma di Luxembourg e media di tipo Jensen si conserva nel passaggio alla complementare di Young.

§ 3. ESEMPI

Consideriamo le N-funzioni:

$$A(t) = t^p [1 + \log_+ t]^\alpha$$

con $p \geq 1$, $\alpha \geq 0$. Ovviamente per $\alpha = 0$ si ha l'equivalenza tra media di tipo Jensen e norma di Luxembourg. Invece, (§ 1), [3], per $\alpha = 1$, $p > 1$, la media di Jensen non è equivalente alla norma di Luxembourg.

Osservazione 4. Se A è una N-funzione verificante la (3), anche la N-funzione A^* definita da

$$A^{*-1}(t) = \frac{A^{-1}(t)}{t^{1/n}}$$

che, in alcuni casi è detta coniugata secondo Sobolev di A , verifica la stessa condizione.

Ciò consente di precisare alcune disuguaglianze ottenute in [4].

Bibliografia

- 1) Andô, T., On Products of Orlicz Spaces, Math. Annalen 140, (1960) 174-186
- 2) Chanillo-Wheeden L^p -Estimates for Fractional Integrals and Sobolev Inequalities - Comm. in P.D.E., 10 (1985), 1077
- 3) Fusco, N. - Comunicazione personale
- 4) Iwaniec, T., Gehring's reverse maximal function inequality; in Approximation and Function Space, Gdansk, North-Holland (1981)
- 5) Krasnoselskii M.A. - Rutickii Y.B., Convex function and Orlicz Spaces, Noordhoff, Groningen, The Netherlands (1961)
- 6) Wheeden R., - Preprint.

PERIODICITY INTERVALS OF THE TAU METHOD FOR THE NUMERICAL
INTEGRATION OF CERTAIN SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

M.R. Crisci*, E. Russo*, A. Vecchio**

Presentata dal socio Carlo Ciliberto

Adunanza del 7 marzo 1987

Abstract

In this paper the periodicity intervals of the tau method applied to certain second order differential equations without first derivative are investigated. We give a lower bound of the right extremum of the periodicity interval for every order of the method when the perturbation term is a linear combination of ultraspherical polynomials and calculate numerically these intervals, when the perturbation term is a linear combination of Legendre or Chebyshev, first and second kind, polynomials and the order n varies from 1 to 20.

1. Introduction

Second order differential equations without first derivative $y''=f(x,y)$ are of great importance, as they arise in many areas of the applied mathematics or else from the semidiscretization of partial differential equations.

* Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R.Caccioppoli"

Via Mezzocannone 8, 80134 Napoli ITALY

** Istituto per Applicazioni della Matematica del C.N.R.

Viale Gramsci 5, Napoli ITALY

If the differential operator maps polynomials into polynomials, the tau method [10], [11], [13], [14], can be applied.

This method constructs a polynomial which is the exact solution of a differential problem, obtained perturbing the given problem with a linear combination of polynomials $V_n(x)$ suitably chosen, as it will be seen later. For a second order differential equation there are two possibilities: reduce it to a system of first order equations or solve it directly.

In the first case the tau method [3] has proved to be A-stable if the perturbation term is a linear combination of Legendre [15] or Chebyshev first kind [2] polynomials. However the computational effort is substantially greater than in the second case.

This paper concerns, then, the stability properties of the tau method when it is applied to a second order differential equation, without first derivative.

Therefore the method is applied to the known test equation $y'' = -\lambda^2 y$ and the elements of the stability matrix are expressed through the polynomial $V_n(x)$. If the $V_n(x)$ are symmetric, some properties of the elements of the stability matrix are established and it is proved that $V_n(x)$ are C-polynomials for certain rational approximations of the tangent function.

Then we obtain the result, similar to that given by Kramarz [8], that if the perturbation term is a linear combination of symmetric polynomials, the right extremum of the periodicity interval is the first positive zero of odd multiplicity of a suitable polynomial. We give a lower bound of this extremum, for every order n of the method, if the perturbation term is a linear combination of ultraspherical polynomials, and calculate numerically the periodicity interval for the perturbation terms more frequently used, that is, Legendre and Chebyshev of first and second kind polynomials, and for the order n varying from 1 to 20.

2. The tau method

In this section we report briefly the essential of the tau method,

for sake of completeness. Only the results essential for our purposes are reported here, details can be found in [13].

Let D be a second order linear differential operator which maps polynomials into polynomials and let us consider the initial value problem:

$$\begin{array}{l}
 (2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Dy = 0 \\ (2.1') \quad y(x_0) = y_0 \\ (2.1'') \quad y'(x_0) = y'_0 \end{array} \right. \quad x_0 < x < b
 \end{array}$$

Let us subdivide the integration range $[x_0, b]$ into subintervals $[x_i, x_{i+1}]$ of size h .

The tau method furnishes a piecewise polynomial approximation, said tau solution, to the solution of (2.1).

In each subinterval $[x_i, x_{i+1}]$ it is a polynomial of degree n , let us say ${}^i y_n(x)$, exact solution of the perturbed problem:

$$\begin{array}{l}
 (2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} D {}^i y_n(x) = {}^i H(x) \\ (2.2') \quad {}^i y_n(x_i) = {}^{i-1} y_n(x_i) \\ (2.2'') \quad {}^i y'_n(x_i) = {}^{i-1} y'_n(x_i) \end{array} \right. \quad x_i < x < x_{i+1}
 \end{array}$$

where

$$\begin{array}{l}
 {}^{-1} y_n(x_0) = y_0 \\
 {}^{-1} y'_n(x_0) = y'_0
 \end{array}$$

For every i the perturbation term ${}^i H(x)$ is a linear combination of polynomials suitably chosen:

$$(2.3) \quad {}^i H(x) = \sum_{j=0}^{s+1} {}^i \tau_j V_{n+j-1}(x)$$

The tau parameters ${}^i \tau_j$ and the number s are furnished by the method, as it will be seen later.

Let us introduce the generating polynomial $P_n(x)$, obtained by applying the operator D to the power x^n and let us denote with p_j^n the coefficient of x^j in $P_n(x)$, that is we put:

$$(2.4) \quad P_n(x) = Dx^n = \sum_{j=0}^m p_j^n x^j$$

Let S be the set of integers t such that none linear combination of $P_n(x)$ has degree t .

The set S is finite [13] and let its elements be t_1, t_2, \dots, t_s , that is $s = \text{card}(S)$.

Now, we can define the canonical polynomials Q_k given by:

$$(2.5) \quad DQ_k(x) = x^{k+1} + R_k(x) \quad k \in N_0 - S$$

where $R_k(x)$, said the residual polynomial belongs to the space spanned by the powers $(x^j)_{j \in S}$, and so it can be written:

$$(2.6) \quad R_n(x) = \sum_{j=1}^s r_j^n x^{t_j} \quad n \in N_0 - S$$

The canonical polynomials can be calculated by the following recursive relation [13]:

$$(2.7) \quad Q_m(x) = \frac{1}{p_m^n} \left[x^n - \sum_{\substack{j=0 \\ j \notin S}}^{m-1} p_j^n Q_j(x) \right]$$

That being stated, for the linearity of D , the tau solution ${}^i Y_n(x)$ can, for every i , be written:

$$(2.8) \quad {}^i Y_n(x) = \sum_{j=0}^{s+1} \tau_j^i \sum_{\substack{k=0 \\ k \notin S}}^{n+j-1} v_k^{n+j-1} Q_k(x)$$

where v_k^n is the coefficient of x^k in $V_n(x)$.

The tau parameters are solution of the linear system:

$$(2.9) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{s+1} \tau_j \sum_{k=0}^{n+j-1} v_k^{n+j-1} Q_k(x_i) = i^{-1} Y_n(x_i) \\ \sum_{j=0}^{s+1} \tau_j \sum_{k=0}^{n+j-1} v_k^{n+j-1} Q'_k(x_i) = i^{-1} Y'_n(x_i) \\ \sum_{j=0}^{s+1} \tau_j \sum_{k=0}^{n+j-1} v_k^{n+j-1} r_\ell^k = \sum_{j=0}^{s+1} \tau_j v_\ell^{n+j-1} \quad \ell=1, \dots, s \end{array} \right.$$

obtained by imposing that (2.8) satisfies the problem (2.2).

3. Stability analysis

The stability analysis is performed by applying the method to the test problem:

$$(3.1) \left\{ \begin{array}{l} y'' + \lambda^2 y = 0 \\ (3.1') \quad y(0) = c_1 \\ (3.1'') \quad y'(0) = c_2 \end{array} \right.$$

Without loss of generality, we can consider only the first integration range, with $x \in [0, h]$ and we can drop out the index i of the integration steps.

In this case the generating polynomial $P_n(x)$ is:

$$P_n(x) = \lambda^2 x^n + n(n-1)x^{n-2}.$$

Therefore $S=\emptyset$, $s=0$ and the canonical polynomials are related by the recursive relation:

$$(3.2) \quad Q_n(x) = \frac{1}{\lambda^2} [x^n - n(n-1)Q_{n-2}(x)]$$

whereas Q_0 and Q_1 , as given by (2.5), are:

$$(3.3) \quad Q_0(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$(3.4) \quad Q_1(x) = \frac{1}{\lambda^2} x$$

From (2.8) the tau solution of the problem (3.1) has the following

expression:

$$(3.5) \quad y_n(x) = \tau_0 A_{n-1}(x) + \tau_1 A_n(x)$$

where

$$(3.6) \quad A_i(x) = \sum_{k=0}^i v_k^i Q_k(x)$$

and v_k^i is the coefficient of x^k in $V_i(x)$.

The τ parameters are solution of the linear system:

$$(3.7) \quad \begin{cases} \tau_0 A_{n-1}(0) + \tau_1 A_n(0) = c_1 \\ \tau_0 A'_{n-1}(0) + \tau_1 A'_n(0) = c_2 \end{cases}$$

Then the tau solution $y_n(x)$ is given by:

$$(3.8) \quad y_n(x) = c_1 \frac{A'_n(0)A_{n-1}(x) - A'_{n-1}(0)A_n(x)}{\Delta} + c_2 \frac{A_{n-1}(0)A_n(x) - A_n(0)A_{n-1}(x)}{\Delta}$$

where:

$$(3.9) \quad \Delta = A_{n-1}(0)A'_n(0) - A_n(0)A'_{n-1}(0)$$

The value of the solution and its derivative in the final point h can be written in the matricial form:

$$\begin{pmatrix} y_n(h) \\ y'_n(h) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

and the stability matrix B has the following elements:

$$(3.10^i) \quad b_{11} = \frac{A'_n(0)A_{n-1}(h) - A'_{n-1}(0)A_n(h)}{\Delta}$$

$$(3.10^{ii}) \quad b_{12} = \frac{A_{n-1}(0)A_n(h) - A_n(0)A_{n-1}(h)}{\Delta}$$

$$(3.10^{iii}) \quad b_{21} = \frac{A'_n(0)A'_{n-1}(h) - A'_{n-1}(0)A'_n(h)}{\Delta}$$

$$(3.10^{iv}) \quad b_{22} = \frac{A_{n-1}(0)A'_n(h) - A_n(0)A'_{n-1}(h)}{\Delta}$$

As it is known, the periodicity interval of the method is the set of values $h\lambda$ such that the eigenvalues of B are in modulus less or equal 1, and the eigenvalues of modulus 1 are simple.

In order to obtain a more suitable expression of the elements b_{ij} let us introduce the following lemma:

Lemma 3.1

The polynomials $Q_n(x)$ and $A_n(x)$ have the following expressions:

$$(3.11) \quad Q_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} (2k)! \frac{x^{n-2k}}{\lambda^{2k+2}}$$

$$(3.12) \quad A_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{V_n^{(2k)}(x)}{\lambda^{2k+2}}$$

Proof:

The (3.11) and (3.12) are obvious for $n=0,1$.

For $n>1$ they follow by induction.

Hereafter the following hypothesis holds: $V_n(x)$ is a polynomial symmetric in $[0, h]$.

Let $V_n^*(x)$ be the polynomial $V_n(x)$ shifted in $[0,1]$ then it is:

$$A_n(1) = (-1)^n A_n(0)$$

$$A'_n(1) = (-1)^{n-1} A'_n(0)$$

and therefore, putting $\beta=h\lambda$ and

$$(3.13) \quad \Delta_1 = F_{n-1}(\beta)F'_n(\beta) - F_n(\beta)F'_{n-1}(\beta)$$

$$(3.14) \quad F_n(\beta) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k V_n^{*(2k)}(1) \beta^{n-2k}$$

$$(3.15) \quad F'_n(\beta) = \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k V_n^{*(2k+1)}(1) \beta^{n-2k-1}$$

the elements of the stability matrix are given by:

$$(3.16') \quad b_{11} = (-1)^{n-1} \frac{F'_n(\beta)F_{n-1}(\beta) + F_n(\beta)F'_{n-1}(\beta)}{\Delta_1}$$

$$(3.16'') \quad b_{12} = (-1)^{n-1} \frac{2F_n(\beta)F_{n-1}(\beta)}{\lambda \Delta_1}$$

$$(3.16''') \quad b_{21} = (-1)^{n-1} \frac{2\lambda F'_{n-1}(\beta)F'_n(\beta)}{\Delta_1}$$

$$(3.16^{iv}) \quad b_{22} = (-1)^{n-1} \frac{F'_n(\beta)F_{n-1}(\beta) + F_n(\beta)F'_{n-1}(\beta)}{\Delta_1}$$

Now the following remarks on the matrix B can be done:

- 1) The diagonal elements b_{11} and b_{22} are equal.
- 2) The determinant of the matrix B is equal to 1.
- 3) b_{11} is the tau solution of (3.1) with initial condition $c_1=1, c_2=0$ and analogously for b_{12} with $c_1=0, c_2=1$, calculated in $x-h$.

So b_{11} and b_{12} are the tau approximation respectively of $\cos(\lambda x)$ and $(1/\lambda) \text{sen}(\lambda x)$ calculated in $x=h$ and the above properties are analogous to the corresponding properties of the trigonometric functions.

Now let us make the following position:

$$(3.17) \quad G_n(\beta) = F_n(\beta)F'_n(\beta)F_{n-1}(\beta)F'_{n-1}(\beta)$$

The following theorems about periodicity intervals can be proved:

Theorem 3.1

The periodicity interval of the tau method is $(0, r)$, where r is the first zero of odd multiplicity of the polynomial $G_n(\beta)$.

Proof

The characteristic polynomial of the stability matrix is given by:

$$s^2 - 2b_{11}s + 1$$

Therefore the stability condition is equivalent to the condition that the discriminant is less or equal to zero, that is:

$$b_{11}^2 - 1 \leq 0$$

From the (3.13') this is equivalent to:

$$G_n(\beta) \leq 0$$

and so the thesis follows since in the neighbourhood of the origin $G_n(\beta)$ is negative.

An analogous result has been found by Kramarz [8].

Theorem 3.2

If $V_n(x) = U_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$, (the ultraspherical polynomial), the periodicity interval of the tau method includes the interval $(0, 2\sqrt{(2n+2\alpha+1)/(\alpha+n+1)})$.

Proof :

In order to find a lower bound for the first zero of $F_n(\beta)$ we apply a theorem, proved in [1], that assures that if a polynomial $\gamma_0 + \gamma_1 x + \dots + \gamma_n x^n$, with $n \geq 1$ has the coefficients positive all its zeros lie in the annulus:

$$\min_{0 \leq i < n} \left\{ \frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1}} \right\} < |x| < \max_{0 \leq i < n} \left\{ \frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1}} \right\}$$

First at all, let us consider the case n even.

Putting $x = -\beta^2$ and applying the above theorem we have that all the zeros of $F_n(x)$ are into the annulus:

$$\min_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \left\{ \frac{U_n^{(2k)}(1)}{U_n^{(2k-2)}(1)} \right\} \leq |x| \leq \max_{1 \leq k \leq \frac{n}{2}} \left\{ \frac{U_n^{(2k)}(1)}{U_n^{(2k-2)}(1)} \right\}$$

where the symbol α has been dropped out for clarity reasons.

The k -th derivative of $U_n(x)$ in 1 has the following expression:

$$U_n^{(k)}(1) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{n(n+2\alpha+1)-j(j+2\alpha+1)}{(\alpha+j+1)} U_n(1) \quad k=1, \dots, n.$$

This can be obtained deriving $k-1$ times the differential equation satisfied by the ultraspherical polynomial $U_n(x)$:

$$(x-x^2)U_n''(x) - (1+\alpha)(2x-1)U_n'(x) + n(n+2\alpha+1)U_n(x) = 0$$

and computing for $x=1$.

Then the sequence $\frac{U_n^{(2k)}(1)}{U_n^{(2k-2)}(1)}$ is decreasing with respect to k , and the minimum is:

$$4 \frac{2n+2\alpha-1}{\alpha+n-1}$$

Therefore a lower bound for the first zero of $F_n(\beta)$, for n even, is:

$$(3.18) \quad r_n^1 = 2 \sqrt{(2n+2\alpha-1)/(\alpha+n-1)} \quad n \geq 2$$

Analogously a lower bound for the first zero of $F'_n(\beta)$, for n even, is:

$$(3.19) \quad r_n^2 = 2 \sqrt{3(2n+2\alpha-1)/(n+\alpha-2)} \quad n \geq 4$$

whereas lower bound for the first zero of $F_n(\beta)$ and $F'_n(\beta)$, for n odd, are respectively:

$$(3.20) \quad r_n^3 = 2 \sqrt{3(2n+2\alpha-1)/(n+\alpha-2)} \quad n \geq 3$$

$$(3.21) \quad r_n^4 = 2 \sqrt{(2n+2\alpha-1)/(\alpha+n-1)}$$

$n > 3$

then combining the (3.18), (3.19), (3.20), (3.21) the thesis follows for $n \geq 3$, whereas, for $n < 3$, it can be easily verified with algebraic calculations.

Corollary 3.2

If $V_n(x) = U_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$ the periodicity interval of the tau method includes, for every n and α , the interval:

$$(0, \sqrt{8})$$

Proof :

It follows because $(2 \sqrt{(2n+2\alpha+1)/(\alpha+n-1)})_{n \in \mathbb{N}}$ is a decreasing sequence and its limit is $\sqrt{8}$.

4. A property of the stability matrix

Let us observe that the elements (3.16') and (3.16'') of the first row of the stability matrix are rational functions of the variable β , that, putting:

$$(4.1) \quad C_n(\beta) = \begin{cases} \frac{F_n(\beta)}{F'_n(\beta)} & \text{if } n \text{ odd} \\ - \frac{F'_n(\beta)}{F_n(\beta)} & \text{if } n \text{ even} \end{cases}$$

can be written:

$$b_{11} = (-1)^{n-1} \frac{1 - C_n(\beta) C_{n-1}(\beta)}{1 + C_n(\beta) C_{n-1}(\beta)}$$

$$b_{12} = (-1)^{n-1} \frac{2 C_n(\beta)}{\lambda (1 + C_n(\beta) C_{n-1}(\beta))}$$

In this section we prove that $C_n(\beta)$ is an approximation of $\text{tg}\frac{\beta}{2}$.

Therefore, remembering that b_{11} and b_{12} are approximations respectively of $\cos\beta$, $\frac{1}{\lambda}\text{sen}\beta$, we have that the above relations are analogous to the known trigonometric identities

$$\cos\beta = \frac{1 - \text{tg}^2 \frac{\beta}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{\beta}{2}}$$

$$\text{sen}\beta = \frac{2 \text{tg} \frac{\beta}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{\beta}{2}}$$

Theorem 4.1

$C_n(\beta)$ is an approximation of $\text{tg}\frac{\beta}{2}$ of order $n+1$ if n is odd and n if n is even.

Proof :

For the known trigonometric identity

$$\text{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1 - \cos\beta}{\text{sen}\beta}$$

for n odd, the thesis is equivalent to :

$$(4.2) \quad (1 - \cos\beta)F'_n(\beta) - \text{sen}\beta F_n(\beta) = O(\beta^{n+3})$$

Expanding in Taylor series $1 - \cos\beta$ and $\text{sen}\beta$, making the Cauchy product and associating the power of β , the coefficient of β^{2k} is given by :

$$(4.3') \quad \sum_{j=1}^{2k} (-1)^{j+1} \frac{V_n^{*(n-2k+j)}(1)}{j!} \quad 1 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$$

$$(4.3'') \quad \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} \frac{V_n^{*(j-1)}(1)}{(2k-n-1+j)!} \quad \frac{n+3}{2} \leq k < \infty$$

On the other hand $V_n^{*(n-2k)}(0)$, as given by the Taylor expansion around 1, is :

$$V_n^{*(n-2k)}(0) = V_n^{*(n-2k)}(1) + \sum_{j=1}^{2k} (-1)^j \frac{V_n^{*(n-2k+j)}(1)}{j!}$$

For the symmetry of $V_n^*(x)$ it is

$$V_n^{*(n-2k)}(0) = V_n^{*(n-2k)}(1) \quad k=1, \dots, \frac{n+1}{2}$$

and so the (4.2) follows.

The case of n even is proved analogously.

Now we invert this theorem.

Let

$$(4.4) \quad \Gamma_n(\beta) = \frac{\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \theta_{2k} \beta^{n-2k}}{\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \delta_{2k+1} \beta^{n-2k-1}}$$

be a rational expression. Then we can prove the following :

Theorem 4.2

If $\Gamma_n(\beta)$ is an approximation of $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ of order $n+1$ if n is odd and n if n is even, then it exists a symmetric polynomial $Z_n(\beta)$ such that:

$$\theta_{2k} = Z_n^{(2k)}(1)$$

$$\delta_{2k+1} = Z_n^{(2k+1)}(1)$$

Proof :

Assume first that n is odd and so $\Gamma_n(\beta)$ is an approximation of $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ of order $n+1$. It is obvious that it exists a symmetric polynomial $Z_n(x)$ such that :

$$Z_n^{(2k+1)}(1) = \delta_{2k+1} \quad k=0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$$

Proceeding as in Theorem 4.1 we have that:

$$\theta_{2k} = Z_n^{(2k)}(1) \quad k=0, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$$

The case n even is analogous.

From the Theorems 4.1, 4.2, taking into account that for a symmetric polynomial $V_n(x)$ it results:

$$V_n^{(2k)}(1) = (-1)^{n-k} V_n^{(2k)}(0)$$

it follows that $V_n(x)$ can be considered a C-polynomial [12] for rational approximations of function tangent of the form (4.4).

When $V_n(\beta)$ is the Legendre polynomial the order of the approximation (4.1) is given by the following theorem:

Theorem 4.3

If $V_n(x)$ is the Legendre polynomial $C_n(\beta)$ is an approximant of $\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$ of order $2n+1$ for n odd and $2n$ for n even.

Proof :

For n odd, the coefficient of β^{2k} given by (3.19) is equal to zero for $1 < k < n$. For $1 < k \leq \frac{n+1}{2}$, it follows from the Theorem 4.1 and for $\frac{n+3}{2} \leq k \leq n$, it follows, with analogous calculations, taking into account that, for the orthogonality of the Legendre polynomial, is:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 x^{2k-n-1} V_n^*(x) dx = \\ &= \sum_{j=0}^{2k-n-1} (-1)^j \binom{2k-n-1}{j} j! V_n^{*(-1-j)}(1) + \\ &\quad - (-1)^{2k-n-1} (2k-n-1)! V_n^{*(-2k+n)}(0) \end{aligned} \quad \frac{n+1}{2} \leq k \leq n$$

For n even it is analogously proved.

5. Numerical periodicity intervals

In this section the periodicity interval of the tau method is numerically determined, for the values of n from 1 to 20 and for the perturbation terms obtained choosing $V_n(x) = U_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$, with $\alpha=0, \alpha=-1/2, \alpha=1/2$

(respectively Legendre, Chebyshev first kind, Chebyshev second kind polynomials).

From the Theorem 3.2, the periodicity intervals have been determined calculating the first positive zero of odd multiplicity of $G_n(\beta)$ with the following algorithms:

- 1) RPOLY [6], based on three stage algorithm of Jenkins and Traub [7];
- 2) POLRT of the SSP library, based on the Newton-Raphson method;
- 3) CØ2AEF of the NAG library, based on an algorithm of Grant and Hitchins [4], [5].

The calculations have been effected on a Univac 1100/80 computer both in simple and multiple precision.

In double precision the results obtained from the above algorithms have equal the first five decimal digits, that we report in Table I.

From the numerical experiments we have seen that the first positive zeros of $F_{n-1}(\beta)$ and $F'_n(\beta)$ tend to multiples of π ; more precisely, for n odd they tend to odd multiples and reciprocally; this is in accordance with the Theorem 3.1.

Therefore we have that for n sufficiently large ($n > 7$) the first zero of the polynomial product $G_n(\beta)$ (3.17) is a double zero and the same phenomenon begins for the subsequent zero.

Numerically we have considered equal two zeros of $G_n(\beta)$ when they have equal the first five decimal digits.

So the numerical interval is significantly larger than the estimate given in the Theorem 3.2, as this theorem gives a bound for the first positive zero of each factor of the polynomial $G_n(\beta)$ and therefore it does not take into account the possibility of multiple zeros for $G_n(\beta)$.

n \ α	0	1/2	-1/2
2	3.46410	3.26598	4
3	3.16227	3.09838	3.26598
4	3.14246	3.09836	3.14749
5	3.14246	3.14122	3.14122
6	3.14159	3.14159	3.14122
7	6.28329	3.14159	3.14158
8	6.28329	3.14159	6.28333
9	9.42675	6.28272	6.28318
10	9.42478	6.28318	9.42483
11	9.42477	6.28318	9.42483
12	9.42477	9.42492	9.42475
13	12.56637	12.56637	9.42477
14	12.56637	12.56632	15.70799
15	15.70796	12.56632	15.70799
16	18.84966	15.70775	15.70796
17	18.84955	15.70795	-18.84956
18	21.99116	15.70796	18.84955
19	21.99114	18.84955	21.99113
20	25.13275	21.98134	21.99113

Table I

Right extremum of the periodicity interval of the tau method with
 perturbation term $\tau_0 U_{n-1}^{(\alpha, \alpha)}(x) + \tau_1 U_n^{(\alpha, \alpha)}(x)$.

References

- [1] N.ANDERSON, E.B.SAFF and R.S.VARGA - "An extension of the Eneström-
Kakeya theorem and its sharpness" - SIAM J. Math. Anal., Vol.12,
n.1, January 1981.
- [2] M.R.CRISCI, E.RUSSO - "A-stability of a class of Methods for the
numerical integration of certain linear systems of ordinary
differential equations" - Math. of Computation, Vol.38, n.15,
Aprile 1982.
- [3] M.R.CRISCI, E.RUSSO - "An extension of Ortiz' recursive formulation
of the tau method to certain linear systems of ordinary differen-
tial equations" - Math. of Computation, Vol.41, n.163 (1983).
- [4] J.A.GRANT, G.D.HITCHINS - "An always convergent minimization
technique for the solution of polynomial equations" - J.I.M.A.,
Vol.8, (1971).
- [5] J.A.GRANT, G.D.HITCHINS - "Two algorithms for the solution of
polynomial equations to limiting machine precision" - Computer
Journal, Vol.18, (1975).
- [6] M.A.JENKINS - "Algorithm 493. Zeros of Real Polynomial" - ACM
Transactions of Math. Software, Vol.1, June 1975.
- [7] M.A.JENKINS, J.F.TRAUB - "A three-stage algorithm for real
polynomials using quadrate interation" - SIAM J. Numer. Anal.
Vol.7, (1970).
- [8] L.KRAMARZ - "Stability of collocation methods for the numerical

solution of $y''=f(x,y)$ " - BIT, Vol.20, (1980).

- [9] J.D.LAMBERT - "Computation methods in ordinary differential equations" - J.Wiley & Sons, (1973).

- [10] C.LANCZOS - "Applied Analysis" - Prentice Hall, Inc., (1956).

- [11] C.LANCZOS - "Legendre versus Chebyshev polynomials" in "Topics in Numerical Analysis" - (Ed. Miller) Academic Press New York 1973.

- [12] NØRSETT - "C-polynomial for rational approximations to the exponential function" - Num. Math., 25, 39-56 (1975).

- [13] E.L.ORTIZ - "The tau method" - SIAM J. of Num. Anal., Vol.6, (1969).

- [14] E.L.ORTIZ - "Step by step tau method. Part I - Piecewise polynomial approximation" - Comp. and Math. with Appl., Vol.1, (1975).

- [15] K.WRIGHT - "Some relationships between implicit Runge-Kutta collocation and Lanczos methods and their stability properties" - BIT, Vol.10, (1970).

.A CONVECTION-DIFFUSION NUMERICAL MODEL FOR A BASIN

P.L.DE ANGELIS* - A.MURLI* - M.A.PIROZZI**

Presentata dal socio Guido Trombetti

Adunanza del 4 Aprile 1987

Abstract

In this paper we consider a numerical model for the simulation of the distribution in space and time of given marine constituents (nutrients, pollutants, etc.).

The evolution equation, which is the most commonly used in the applications, is solved numerically by a finite difference "upwind" scheme and stability conditions in the maximum norm are also obtained.

Finally some results from its application to regular or real basins (Gulf of Naples) are described.

* University of Naples - Department of Mathematics

** Naval University Institute of Naples - Institute of Mathematics

1. THE MATHEMATICAL MODEL

The evolution of a marine constituent results from the advection by the currents, the migration (in particular the sedimentation), the dispersion by molecular diffusion, the turbulence and the chemical, biochemical or ecological interactions.

The cumulative effect of these processes on the variation of the concentration C_a of a given constituent a is expressed in mathematical form by the equation:

$$(1.1) \quad \frac{\partial C_a}{\partial t} + \nabla \cdot C_a v_a = R_a + I_a$$

where v_a is the velocity of a , R_a and I_a represent the rates of production (or destruction) of a by external or internal factors, respectively.

If the interaction with other constituents has only little influence on the evolution of C_a and can be neglected, the equation (1.1) can be solved independently of the other evolution equations of the model.

A non-interacting constituent which can be described in this simple way is called a "passive" constituent.

In addition to adequately describing the evolution of some-effectively passive-constituents, a passive model always provides valuable estimates of the distribution of non-passive constituents by, at least, appraising their possible transport by the sea motion.

In the following we consider a passive diffusion model [1] of the kind

$$(1.2) \quad \frac{\partial C}{\partial t} + \nabla \cdot (C u) = R + I - \nabla \cdot (\sigma C) + D$$

where

$\nabla \cdot (C u)$ represents the "advection" and it introduces a coupling with the fluid velocity u ;

R represents the local inputs and outputs; in many cases it is zero;

- I represents the chemical, biochemical and ecological interactions;
- $V \cdot (\sigma C)$ represents the "migration" (sedimentation, horizontal migration of fish);
- D represents the turbulent dispersion resulting from the sea agitation.

2. THE SINGLE LAYER MODEL

If one assumes that $I = -SC$, by integrating the (1.2) over the depth Z , we obtain the following equation:

$$(2.1) \quad \frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + V \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = \frac{1}{H} \left[\frac{\partial}{\partial x} (H d_x \frac{\partial \bar{C}}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (H d_y \frac{\partial \bar{C}}{\partial y}) \right] + Q - S \bar{C}, S \geq 0.$$

where

- $\bar{C}(x,y,t)$ the mean concentration;
- $U(x,y,t), V(x,y,t)$ components of the mean velocity of the fluid;
- $H(x,y,t) = h(x,y) + Z(x,y,t)$ the total depth;
- $h(x,y)$ the depth at the point (x,y) ;
- d_x, d_y diffusion coefficients.

The assumptions implicit in (2.1) are the following ones

- I) the horizontal migration is neglected;
- II) the "shear effect" is neglected because we are not interested in dealing with the diffusion of a contaminant over a limited region around a point source;
- III) the eddy dispersion D has the form

$$D = \frac{\partial}{\partial x} (d_x \frac{\partial C}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (d_y \frac{\partial C}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (d_z \frac{\partial C}{\partial z})$$

which is, however, the most commonly used in the applications.

Let Ω be the bounded region of the (x,y) plane containing the basin under consideration. Let $\partial\Omega_0$ be the part of $\partial\Omega$ which is in contact with the open sea and $\partial\Omega_c = \partial\Omega - \partial\Omega_0$ the part of $\partial\Omega$ which is in contact with the coastline. Following [2] we consider the equation (2.1) in a region of the sea obtained from Ω replacing $\partial\Omega_c$ by a fictitious boundary, which will be denoted by $\partial\Omega_c$, chosen so that the depth of the basin will be different from zero.

The problem to be solved is the equation (2.1) in $\Omega \times]0, T[$ with the following initial and boundary conditions⁽¹⁾

$$\bar{c}(x,y,0) = \bar{c}_0(x,y) \quad , \quad (x,y) \in \Omega$$

$$(2.2) \quad \frac{\partial \bar{c}}{\partial n} + \beta \bar{c} = 0 \quad , \quad (x,y,t) \in \partial\Omega \times]0, T[$$

with $\beta < 0$ and n external conormal to $\partial\Omega$.

3. THE NUMERICAL METHOD

Following [2], for the irregular geometry of the basin Ω , we replace it by a suitable domain $\bar{\Omega}$ with a piecewise linear boundary with sides parallel to the coordinate axes, contained in the rectangle

$$R = \{(x,y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} .$$

Let M , N and K be three positive integers.

We introduce a mesh $\bar{\Omega}_{\Delta x, \Delta y, \Delta t}$ over $\bar{\Omega} \times]0, T[$ by means of the lines

(1) For existence and uniqueness see [3].

$$x = m \frac{\Delta x}{2}, \quad (m = -1, 0, \dots, 2M+1)$$

$$y = n \frac{\Delta y}{2}, \quad (n = -1, 0, \dots, 2N+1)$$

$$t = k\Delta t, \quad (k = 0, 1, \dots, K+1)$$

where

$$\Delta x = \frac{a}{M+1}, \quad \Delta y = \frac{b}{N+1}, \quad \Delta t = \frac{T}{K+1}.$$

A first attempt at the solution, with a standard central difference approximation to the convective terms had to be abandoned as the method produced negative values for the concentration which in no way correspond to the reality of the physical situation.

The problem is overcome by using an "upwind" approximation to the convective terms with forward or backward difference dependent upon the direction of fluid flow.

Let

$$U_{m,n}^k = U(m\Delta x, n\Delta y, 2k\Delta t)$$

$$V_{m,n}^k = V(m\Delta x, n\Delta y, 2k\Delta t), \quad (m=0, 1, \dots, M; \quad n=0, 1, \dots, N; \quad k=1, 2, \dots, [K/2])$$

$$H_{m,n}^k = H(m\Delta x, n\Delta y, 2k\Delta t)$$

$$c_{m,n}^k = c((2m+1)\Delta x/2, (2n+1)\Delta y/2, (2k-1)\Delta t)$$

$$(m=0, 1, \dots, M-1; \quad n=0, 1, \dots, N-1; \quad k=1, 2, \dots, [K/2])$$

A finite difference approximation to the equation (2.1) is given by

$$(3.1) \quad c_{m,n}^{k+1} = c_{m,n}^k - 2\Delta t \left\{ U_c C_X + V_c C_Y - \frac{1}{H} \left[\frac{d_x}{2\Delta x^2} \left[(H_{m+1,n+1}^k + H_{m+1,n}^k)(c_{m+1,n}^k - c_{m,n}^k) - H_{m,n+1}^k + H_{m,n}^k \right] (c_{m,n}^k - c_{m-1,n}^k) \right] + \frac{d_y}{2\Delta y^2} \left[(H_{m+1,n+1}^k + H_{m,n+1}^k)(c_{m,n+1}^k - c_{m,n}^k) - (H_{m+1,n}^k + H_{m,n}^k)(c_{m,n}^k - c_{m,n-1}^k) \right] \right\}$$

$$\left. + H_{m,n}^k (c_{m,n}^k - c_{m,n-1}^k) \right] + S_{m,n}^k c_{m,n}^k - Q_{m,n}^k \left. \right\}$$

where

$$U_C = \frac{1}{4} (U_{m,n}^k + U_{m+1,n}^k + U_{m,n+1}^k + U_{m+1,n+1}^k)$$

$$V_C = \frac{1}{4} (V_{m,n}^k + V_{m+1,n}^k + V_{m,n+1}^k + V_{m+1,n+1}^k)$$

$$H' = \frac{1}{4} (H_{m+1,n}^k + H_{m+1,n+1}^k + H_{m,n+1}^k + H_{m,n}^k)$$

$$CX = \begin{cases} \frac{c_{m,n}^k - c_{m-1,n}^k}{\Delta x} & , \quad U_C > 0 \\ \frac{c_{m+1,n}^k - c_{m,n}^k}{\Delta x} & , \quad U_C < 0 \end{cases}$$

$$CY = \begin{cases} \frac{c_{m,n}^k - c_{m,n-1}^k}{\Delta y} & , \quad V_C > 0 \\ \frac{c_{m,n+1}^k - c_{m,n}^k}{\Delta y} & , \quad V_C < 0 \end{cases}$$

Let \bar{m} and \bar{n} be two positive integers such that the point $(\bar{m}\Delta x, (\bar{n}+1/2)\Delta y)$ belongs to the boundary of $\bar{\Omega}_{\Delta x, \Delta y}$.

Let

$$c_{in} = c_{\bar{m}, \bar{n}}^k \quad , \quad c_{out} = c_{\bar{m}-1, \bar{n}}^k$$

or

$$c_{in} = c_{\bar{m}-1, \bar{n}}^k \quad , \quad c_{out} = c_{\bar{m}, \bar{n}}^k$$

A finite difference approximation to (2.2) along the boundary parallel to y axis is given by

$$\frac{c_{in} - c_{out}}{\Delta x} + \beta \frac{c_{in} + c_{out}}{2} = 0 .$$

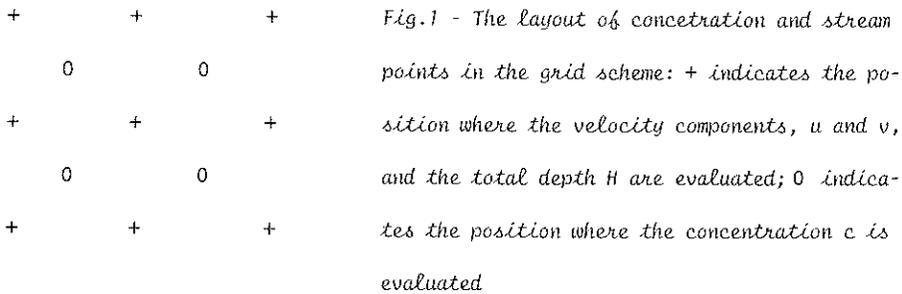
Analogously, for the boundary point $((\bar{m}+1/2)\Delta x, \bar{n}\Delta y)$ we have

$$\frac{c_{in} - c_{out}}{\Delta y} + \beta \frac{c_{in} + c_{out}}{2} = 0 .$$

The above relations implice that

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{out} = \gamma_1 c_{in} \quad , \quad \gamma_1 = (2+\beta\Delta x)/(2-\beta\Delta x) \\ c_{out} = \gamma_2 c_{in} \quad , \quad \gamma_2 = (2+\beta\Delta y)/(2-\beta\Delta y) . \end{array} \right.$$

It can be easily verified that (3.1)-(3.2) are a consistent approximation to (2.1)-(2.2) with a truncation error $O(\Delta t)$ in the time and $O(\Delta x)$ in the space (x,y) for "smooth solutions".



4. STABILITY AND ERROR GROWTH ANALYSIS

Let

$$L_h(c) = c(x,t+\Delta t) - \sum_I \alpha_I(x,t)c(x+r\Delta x,t)$$

be a consistent approximation to the differential operator

$$L(c) = \frac{\partial c}{\partial t} - a_0 \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - a_1 \frac{\partial c}{\partial x} - a_2$$

Consider the boundary value problem

$$(4.1) \quad \begin{aligned} L_h(c) &= \Delta t Q &&]a, b[\times]0, T[\\ c(x, t) &= \phi(x, t) &&]-\infty, a[\times]0, T[\\ c(x, t) &= \psi(x, t) &&]b, \infty[\times]0, T[\\ c(x, t) &= c_0(x) && t = 0 \end{aligned}$$

the following Theorem holds

Theorem 4.1

Let $L_h(c)$ be an operator of positive type. Denote by \bar{Q} , $\bar{\phi}$, $\bar{\psi}$ \bar{C}_0 the least upper bounds for the numerical values of the functions Q , ϕ , ψ and C_0 in their respective domains of definition.

Let $\Delta x \leq \bar{\Delta x}$. Then there exists a constant P depending on T , $\bar{\Delta x}$ and $\lambda(\lambda = \Delta t / \Delta x^2)$ but not on x, t and Δx such that the solution of problem (4.1) satisfies the inequality

$$|c(x, t)| \leq P [\max(\bar{C}_0, \bar{\phi}, \bar{\psi}) + \Delta t \bar{Q}]$$

Moreover the problem (4.1) is stable in the maximum norm.

Next we can prove the following

Theorem 4.2

Let

$$|u| \leq \bar{u} \quad , \quad |v| \leq \bar{v} \quad , \quad |s| \leq \bar{s} \quad , \quad |d_x| \leq \bar{d}_x \quad , \quad |d_y| \leq \bar{d}_y$$

If

$$(4.2) \quad \beta \leq 0$$

a sufficient condition for the scheme stability in the maximum norm is that

$$(4.3) \quad \Delta t \leq \frac{1}{8 \left[\frac{\tilde{d}_x}{\Delta x^2} + \frac{\tilde{d}_y}{\Delta y^2} \right] + 4 \left[\frac{\tilde{u}}{\Delta x} + \frac{\tilde{v}}{\Delta y} \right] + 2\tilde{S}}$$

Proof

Let

$$(4.4) \quad \sigma_1 = 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} |U_c|, \quad \sigma_2 = 2 \frac{\Delta t}{\Delta y} |V_c|, \quad \tau_1 = 2 \frac{\Delta t}{\Delta x} d_x, \quad \tau_2 = 2 \frac{\Delta t}{\Delta y} d_y$$

From (3.1) it follows that at the interior grid points of $\bar{\Omega}_{\Delta x, \Delta y, \Delta t}$

$$c_{m,n}^{k+1} = a_{m,n}^k c_{m,n}^k + a_{m,n+1}^k c_{m,n+1}^k + a_{m,n-1}^k c_{m,n-1}^k + a_{m+1,n}^k c_{m+1,n}^k + a_{m-1,n}^k c_{m-1,n}^k + 2\Delta t Q_{m,n}^k$$

where

$$a_{m,n}^k = 1 - \sigma_1 - \sigma_2 - 2(\tau_1 + \tau_2 + S_{m,n}^k \Delta t); \quad a_{m,n+1}^k = \eta_2 + \tau_2 (H_{m+1,n+1}^k + H_{m,n+1}^k) / 2H'$$

$$a_{m,n-1}^k = \delta_2 + \tau_2 (H_{m+1,n}^k + H_{m,n}^k) / 2H'; \quad a_{m-1,n}^k = \delta_1 + \tau_1 (H_{m,n+1}^k + H_{m,n}^k) / 2H'$$

$$a_{m+1,n}^k = \eta_1 + \tau_1 (H_{m+1,n+1}^k + H_{m+1,n}^k) / 2H'$$

$$\eta_j = \begin{cases} 0 & , U_c, V_c \text{ positive} \\ \sigma_j & , U_c, V_c \text{ negative} \end{cases} \quad \delta_j = \begin{cases} \sigma_j & , U_c, V_c \text{ positive} \\ 0 & , U_c, V_c \text{ negative} \end{cases}$$

When $c_{m,n}^k$ is the unique interior grid point it results that

$$(4.5) \quad c_{m,n}^{k+1} = (a_{m,n}^k + \gamma_1 (a_{m+1,n}^k + a_{m-1,n}^k) + \gamma_2 (a_{m,n+1}^k + a_{m,n-1}^k)) c_{m,n}^k + 2\Delta t G_{m,n}^k$$

where γ_1, γ_2 , defined by (3.2), belong to the interval $[-1, 1]$ for (4.2).

From (4.5) we have that the condition (4.3) guarantees the positivity of all coefficients of the scheme.

Since, for (4.2), the discrete solution on the boundary is always bounded from the solution at the interior points, we can easily extend the Theorem 4.1 to the problem (3.1) - (3.2) and this proves the assertion. ■

In diffusion-convection problems, the stability is also studied with the so-called matrix method [5].

Consider the matrices of order $(N+1) \times (N+1)$

$$T_m^k = \begin{Bmatrix} a_{m,n-1}^k & a_{m,n}^k & a_{m,n+1}^k \end{Bmatrix}, \quad B_m^k = \text{diag} \left\{ a_{m-1,n}^k \right\}, \quad F_m^k = \text{diag} \left\{ a_{m+1,n}^k \right\}$$

and the $(N+1)$ -vector which represents the unique solution of (3.1)

$$c_m^k = (c_{m,0}^k, c_{m,1}^k, \dots, c_{m,n}^k)^T.$$

Let

$$(4.6) \quad A_k = \begin{Bmatrix} B_m^k & T_m^k & F_m^k \end{Bmatrix}, \quad c^k = (c_0^k, c_1^k, \dots, c_M^k)^T$$

it results that

$$(4.7) \quad c^{k+1} = A_k c^k + 2\Delta t G_k$$

where G_k is due to known terms.

Clearly, the error in a calculation based on (4.7) is given by

$$(4.8) \quad E_{k+1} = A_k E_k$$

where $E_k = c^k - \bar{c}^k$ and \bar{c}^k is the vector of order $(M+1) \times (N+1)$ whose components are the exact solution of (3.1).

The concept of stability which is associated with the matrix method concerns the bounded growth of error E_k as $k \rightarrow \infty$ with $\Delta x, \Delta y$ and Δt fixed.

To this end we can prove the following

Theorem 4.3

Let the hypotheses of Theorem 4.2 hold.

The inequality (4.3) is a sufficient condition to ensure that

$$(4.9) \quad \|E_k\|_{\infty} \leq \|E_0\|_{\infty} \quad \forall k$$

where E_0 is the initial error.

Moreover if

$$(4.10) \quad S > 0$$

we have

$$(4.11) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} E_k = 0$$

Proof

From (4.8) it follows that

$$\|E_k\|_\infty \leq \prod_{j=0}^{k-1} \|A_j\|_\infty \|E_0\|_\infty ,$$

where A_k is the matrix defined by (4.6).

On the other hand for (4.3) and by direct computation it results that

$$\|A_k\|_\infty \leq 1, \forall k$$

and this proves the inequality (4.9).

Finally from (4.10) it follows that

$$\exists q : \|A_k\|_\infty \leq q < 1, \forall k$$

and this proves the (4.11). ■

The scheme stability can be also studied by means of the Lax method [6] which, in the present case, gives a condition only necessary.

To this end, consider the following constant coefficient homogeneous equation

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \bar{C}}{\partial y} = \tilde{d}_x \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial x^2} + \tilde{d}_y \frac{\partial^2 \bar{C}}{\partial y^2} - \tilde{s} \bar{C}$$

The following Theorem holds

Theorem 4.4

A necessary condition to the scheme stability is that

$$\Delta t < 1 / [4 (\tilde{d}_x / \Delta x^2 + \tilde{d}_y / \Delta y^2)] .$$

Proof

Let

$$\theta_1 = \theta_1 \Delta x , \quad \theta_2 = \theta_2 \Delta y$$

By direct computation the amplification factor is given by

$$G(\theta_1, \theta_2) = a'_{m,n} + a'_{m,n+1} e^{i\theta_2} + a'_{m,n-1} e^{-i\theta_2} + a'_{m+1,n} e^{i\theta_1} + a'_{m-1,n} e^{-i\theta_1}$$

where

$$a'_{m,n} = 1 - \tilde{\sigma}_1 - \tilde{\sigma}_2 - 2(\tilde{\tau}_1 + \tilde{\tau}_2 + \tilde{S}\Delta t) ,$$

$$a'_{m,n+1} = \tilde{\eta}_2 + \tilde{\tau}_2 , \quad a'_{m,n-1} = \tilde{\delta}_2 + \tilde{\tau}_2 ,$$

$$a'_{m+1,n} = \tilde{\eta}_1 + \tilde{\tau}_1 , \quad a'_{m-1,n} = \tilde{\delta}_1 + \tilde{\tau}_1 ,$$

with $\sigma_j, \tau_j, \eta_j, \delta_j$ ($j=1,2$) defined as in Theorem 4.2.

Therefore the assertion follows from the von Neumann criterion. ■

5. APPLICATIONS AND NUMERICAL RESULTS

The proposed model has been tested on basins regular or real, in particular numerical experiments on regular basins have been carried out in order to perform convergence and stability test.

5.1 - TEST PROBLEMS

We consider in the square

$$\bar{\Omega} = \{(x,y) : 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$$

the equation (2.1) where

$$d_x = d_y = d, S=4, H(x,y)=1+xy, u=yd/(1+xy), v=xd/(1+xy)$$

$$Q(x,y,t) = \{\alpha/(1+\alpha^2 t^2) + S \cdot \text{arctg}(\alpha t)\} \cdot (x-x^2+2) \cdot (y-y^2+2) + \\ + 2d(4+x+y-x^2-y^2) \cdot \text{arctg}(\alpha t)$$

with the following initial and boundary conditions

$$c(x,y,0)=0, \quad (x,y) \in \bar{\Omega}; \quad \frac{\partial c}{\partial n} + \beta c(x,y,t)=0, \quad (x,y,t) \in \partial\bar{\Omega} \times]0,T[$$

The problem has the solution

$$c(x,y,t) = (x-x^2+2)(y-y^2+2)\text{arctg}(\alpha t), \quad (x,y,t) \in \bar{\Omega} \times]0,T[.$$

Fig.2 shows the relative error in the solution computed by (3.1) for $N=M=10$ with different choices of Δt and $\alpha=100$, $\beta=-5$, $d=1$, while Fig.3 shows the relative error for Δx , Δy and Δt fixed ($\Delta x=\Delta y=.1$, $\Delta t=.28(-3)$) and for some values of d .

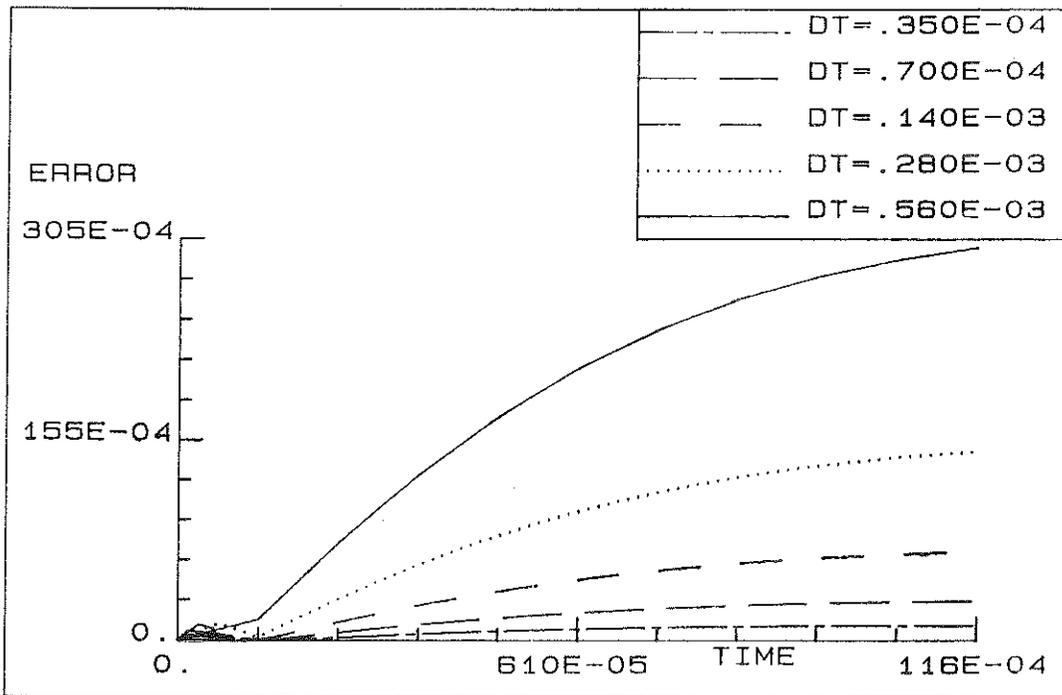


Fig.2 - Relative error for different choice of Δt .

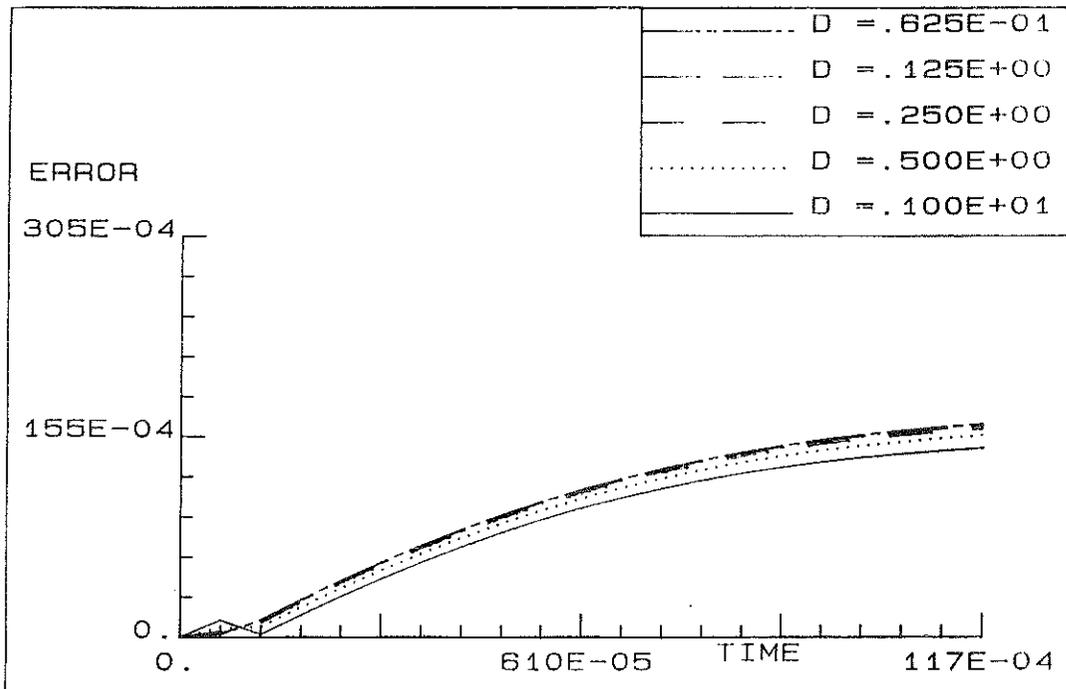


Fig.3 - Relative error for different choice of diffusion coefficient.

A further experience has been performed solving the equation (2.1) in the rectangle

$$\bar{\Omega} = \{(x,y): 0 \leq x \leq 45500, \quad 0 \leq y \leq 17500\}$$

where

$$d_x = d_y = 150, \quad u = 0.1, \quad v = 0, \quad S = 0, \quad h(x,y) = \text{constant} = 20$$

$$Q(x,y,t) = \begin{cases} 0 & , t \neq 0 \\ 600/\Delta t & , t = 0, x = 10\Delta x, y = 5\Delta y \end{cases}$$

with the following initial and boundary conditions

$$c(x,y,0) = 0, \quad (x,y) \in \bar{\Omega}; \quad c(x,y,t) = 0, \quad (x,y,t) \in \partial\Omega_c \times]0, T[$$

$$\frac{\partial c}{\partial n} = 0, \quad (x,y,t) \in \partial\bar{\Omega}_0 \times]0, T[$$

where

$$\partial\Omega_0 = \{(x,y) : x=0, x=1, 0 \leq y \leq 1\}, \quad \partial\Omega_c = \partial\Omega - \partial\Omega_0.$$

Fig.4 shows the concentration profiles obtained by (3.1) with $M=10$, $N=26$, $\Delta x = \Delta y = 750$ and different values of Δt , for $y=5\Delta y$ and at a fixed time t .

We remark that, if Δt satisfies the stability condition (4.3), the approximate solution is "regular" and positive, too; in the other cases c has strong "oscillations".

Fig.5 shows the concentration profiles for $y=5\Delta y$ with $\Delta t=125$ as t varies.

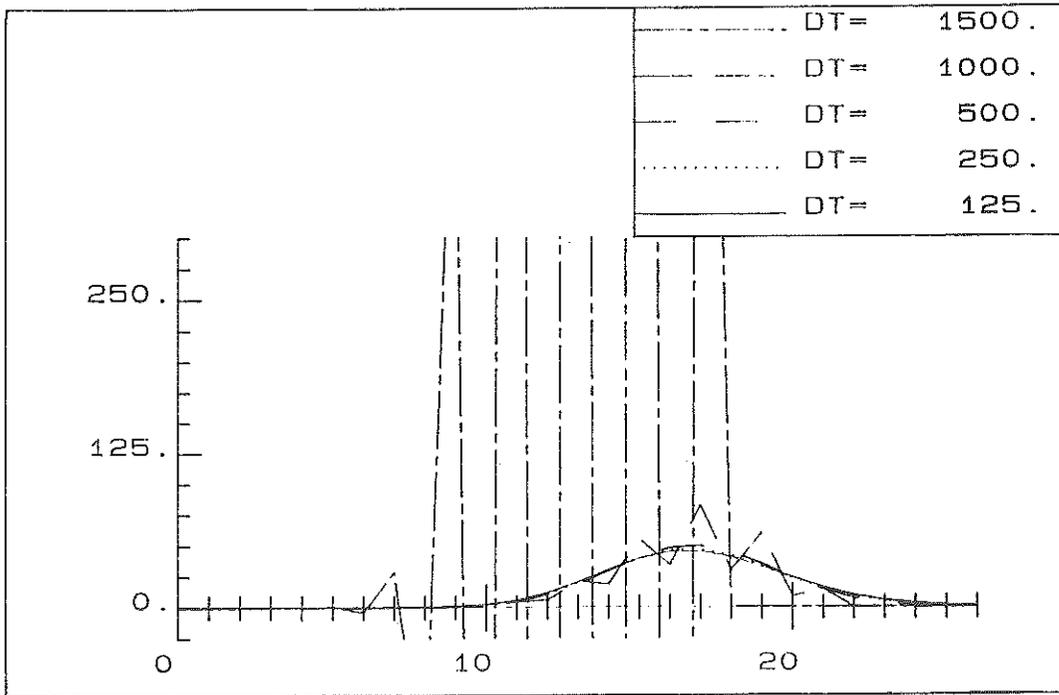


Fig.4 - Concentration profiles for different values of Δt .

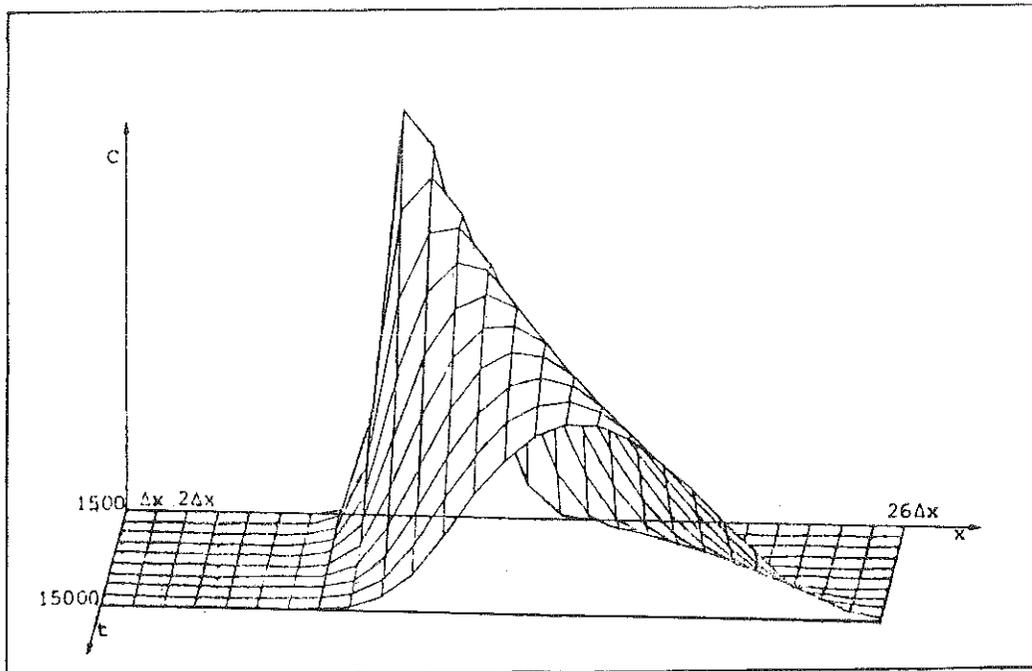


Fig.5 - Concentration profiles for a fixed Δt .

5.2 - A REAL CASE

The proposed model has been tested on a real basin including the Naples's Gulf inside.

Following [2] many numerical experiments have been performed with constant stream on the open boundary of the basin, using the equation (3.1) with the same initial and boundary conditions as in section 5.1, where

$$M = 19, \quad N = 26, \quad \Delta x = \Delta y = 3000, \quad \Delta t = 6\text{sec.}, \quad S = 0$$

$$d_x = d_y = 450, \quad Q(x,y,t) = \begin{cases} 10, & (x,y) = (10\Delta x, 4\Delta y) \\ 0, & \text{other-wise} \end{cases}$$

Fig. 6 gives isoconcentration lines after six hours of simulation.

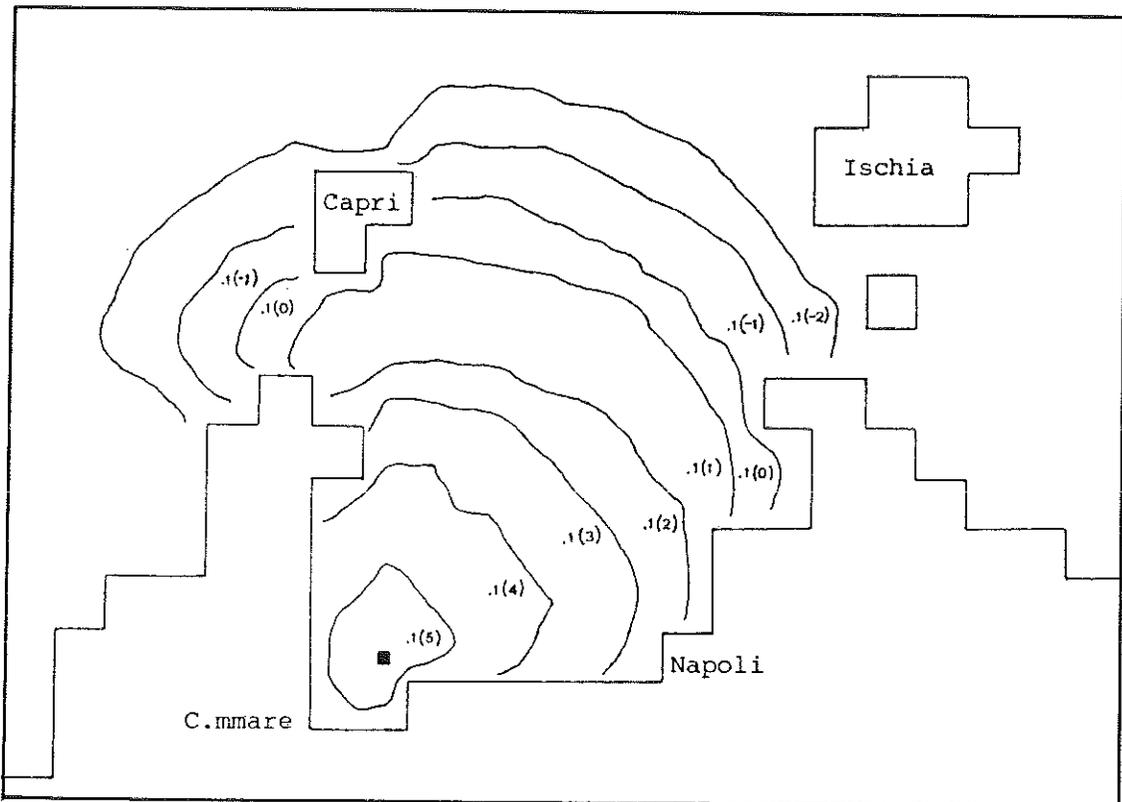


Fig. 6 - Isoconcentration lines in a "real" case (Gulf of Naples).

References

- [1] J.NIHOUL - "Modelling of Marine Systems" - Elsevier Scientific Publishing Company, 1974.

- [2] A.D'ALESSIO, P.L.DE ANGELIS, A.MURLI, M.A.PIROZZI - "Numerical Models for the Simulation of Currents in Naples Gulf" - Math. Comptr. Simulation, XXV, 1983, 436-451.

- [3] A.FRIEDMAN- "Partial Differential Equations of Parabolic Type" Prentice Hall, 1964.

- [4] G.FORSYTHE, W.WASOW - "Finite Difference Methods for Partial Differential Equations" - J. Wiley, 1960, 111-112.

- [5] D.F.GREFFITHS; I.CHRISTIE, A.R.MITCHELL - "Analysis of Error Growth for Explicit Difference Scheme in Conduction-Convection Problems" - Int. J. Math. Eng., 15, 1980, 1075-1081.

- [6] K.W.MORTON - "Stability of Finite Difference Approximations to a Diffusion-Convection Equation" - Int. J. Num. Math. Eng., 15, 1980, 677-683.

A NOTE ON THE SPHERICAL MAXIMAL FUNCTION

Nota di Alberto Fiorenza^(*)

Presentata dal socio Carlo Sbordone

Adunanza del 9/5/87

Riassunto. Si dimostra che una funzione non negativa di una o due variabili coincidente quasi ovunque con la sua funzione massimale sferica è costante. Il risultato non sussiste in più di due dimensioni.

Abstract. A nonnegative function of one or two variables, which is assumed to be a.e. equal to its maximal function, is necessarily constant. The result does not hold in three or more dimensions.

For each $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, let Mf be the spherical maximal function of f , defined for $x \in \mathbb{R}^n$ by ([3]):

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \int_{B(x,r)} f(t) dt$$

where $B(x,r)$ is the sphere centered in x with radius r .

Aim of this note is to show that a nonnegative function of one or two variables, which is a.e. equal to its spherical maximal function, is necessarily constant; it shall also be proved that the result does not hold with functions of n variables with $n \geq 3$.

By means of mollifiers, the question is restricted to functions of class $C^2(\mathbb{R}^n)$. It is then noted that functions with the above property are concave when $n=1$ and superharmonic when $n=2$: hence our statement is immediately proven in the first case, and in the second we deduce that the nonnegative functions are necessarily harmonic and therefore constant.

If $n=1$, it is shown that we can prove our statement with an elementary procedure not using mollifiers.

We shall finally see that, using the results of this note, one may answer to a question on functions f of n variables ($n \geq 3$) such that $Mf \leq K \cdot f$ (K constant > 1).

THEOREM. If (and only if) $n = 1, 2$:

(1) $Mf = f$ a.e. $\Rightarrow f$ constant.

(*) Dipartimento di Matematica ed Applicazioni "R.Caccioppoli", Università di Napoli, Via Mezzocannone 8, 80134 NAPOLI.

Proof. Let us first show it is not restrictive to suppose $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

Thus, let (ρ_h) be a sequence of nonnegative mollifiers of class $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ such that:

$$\text{supp } \rho_h \subset B(0, \frac{1}{h}) \quad , \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_h(t) dt = 1.$$

For each $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, if $f_h(x) = (\rho_h * f)(x)$ we have, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ and $\forall r > 0$:

$$\int_{B(x,r)} f_h(y) dy = \int_{B(x,r)} dy \int_{\mathbb{R}^n} \rho_h(y-z) f(z) dz = \int_{B(x,r)} dy \int_{\mathbb{R}^n} \rho_h(v) f(y-v) dv = \int_{\mathbb{R}^n} \rho_h(v) dv \int_{B(x,r)} f(y-v) dy =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_h(v) dv \int_{B(x-v,r)} f(w) dw .$$

If $Mf = f$, we have

$$\int_{B(x-v,r)} f(w) dw \leq f(x-v) \quad \text{for } v \text{ a.e. in } \mathbb{R}^n ,$$

and consequently:

$$\int_{B(x,r)} f_h(y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho_h(v) f(x-v) dv = f_h(x) .$$

Therefore we also have $Mf_h(x) = f_h(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}^n$).

We then have only to prove (1) for $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ since $f_h \rightarrow f$ in L^1 on every compact subset of \mathbb{R}^n .

Case $n = 1$.

Obviously $Mf = f \Rightarrow f'' \leq 0$: that is, if there were an open interval $I =]x_0 - \delta , x_0 + \delta[$, where $f'' > 0$, f would be strictly convex there and consequently:

$$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\} ,$$

so that:

$$\int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} f(x) dx > f(x_0)$$

which is not true. But a concave function on \mathbb{R} is majorized by an affine

function and, being bounded below, is therefore constant.

Case $n = 2$.

In this case

$$\Delta f = f \Rightarrow \Delta f \leq 0,$$

because, if there were a sphere $B(x_0, r)$ where $\Delta f > 0$, we would have:

$$f(x_0) < \int_{B(x_0, r)} f(x) dx$$

by the mean value theorem for subharmonic functions [1], against our assumptions.

We now show that f , superharmonic on \mathbb{R}^2 and bounded below, is necessarily harmonic. Or, that a function u , subharmonic on \mathbb{R}^2 and bounded above, is harmonic: our statement is thus proved.

If $B_r = B(0, r) \forall r > 0$, the function defined by:

$$\phi(r) = \frac{1}{r^2} \iint_{B_r} u dx dy = \frac{1}{r^2} \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} u(\rho, \theta) d\theta \quad \forall r > 0, \quad \phi(0) = \pi \cdot u(0)$$

is bounded above, continuous at 0, and of class C^2 on $]0, +\infty[$. For each $r > 0$ we have:

$$(2) \quad \phi'(r) = -\frac{2}{r^3} \iint_{B_r} u dx dy + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) d\theta$$

and being ν the unit outward normal to ∂B_r :

$$\begin{aligned} \phi''(r) &= \frac{6}{r^4} \iint_{B_r} u dx dy - \frac{3}{r^2} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) d\theta + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} u_\rho(r, \theta) d\theta = -\frac{3\phi'(r)}{r} + \\ &+ \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) d\theta = -\frac{3\phi'(r)}{r} + \frac{1}{r^2} \int_{\partial B_r} Du \cdot \nu ds = -\frac{3\phi'(r)}{r} + \frac{1}{r^2} \iint_{B_r} \operatorname{div}' Du dx dy = \\ &= -\frac{3\phi'(r)}{r} + \frac{1}{r^2} \iint_{B_r} \Delta u dx dy. \end{aligned}$$

Therefore, if

$$g(r) = \frac{1}{r^2} \iint_{B_r} \Delta u dx dy \quad \forall r > 0, \quad g(0) = \pi \cdot \Delta u(0)$$

ϕ is a solution of the differential equation:

$$\phi''(x) + \frac{3\phi'(x)}{x} = g(x) ,$$

with the free term continuous on $[0, +\infty[$.

It follows that:

$$r\phi'(r) = \frac{c}{x^2} + \frac{1}{x^2} \int_0^r \rho^3 g(\rho) d\rho$$

where c is constant, and, letting $r \rightarrow 0$, being $x\phi'(x)$ bounded near 0 because of (2), $c = 0$.

We thus have:

$$\phi'(r) = \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho^3 g(\rho) d\rho$$

and:

$$(3) \quad \phi(r) = \int_0^r \frac{d\rho}{\rho^3} \int_0^\rho s^3 g(s) ds + \pi \cdot u(0) .$$

If Δu were not identically zero on \mathbb{R}^2 , we would have $r_0 > 0, a > 0$ so that:

$$r^2 g(r) = \iint_{B_r} \Delta u \, dx dy \geq 2a \quad \forall r \geq r_0$$

and therefore from (3):

$$\phi(r) \geq \int_{r_0}^r \frac{d\rho}{\rho^3} \int_{r_0}^\rho 2as \, ds + \pi \cdot u(0) = a(\log r - \log r_0 + \frac{r_0^2}{2r^2} - \frac{1}{2}) + \pi \cdot u(0)$$

which is absurd being ϕ bounded above.

Case $n \geq 3$.

We have to prove the existence of not constant functions f so that $Mf = f$. If

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n ,$$

we have:

$$\Delta f(x) = \frac{(3-n) |x|^{2-n}}{(1+|x|^2)^{5/2}}$$

and f is superharmonic on \mathbb{R}^n . By the mean value theorem for superharmonic functions [1], follows that $Mf = f$.

Case $n = 1$: one more proof.

As said before, we wish to prove (1) by an elementary procedure not using mollifiers. In order to avoid useless formalities, the representative of the class f which coincides with Mf is denoted by the same letter f .

We shall start by noting that:

OBS. 1. If x_0 is a point of local minimum for f , this function is locally constant near x_0 .

Being x_0 a point of local minimum for f , there is a $\lambda_0 > 0$ so that $f(x_0) = \min f(I)$,

$I =]x_0 - \lambda_0, x_0 + \lambda_0[$, and therefore such that $f(x_0) \leq \int_{x_0 - \lambda_0}^{x_0 + \lambda_0} f(t) dt$. Consequently, since

$Mf(x_0) = f(x_0)$, we must have $f(x_0) = \int_{x_0 - \lambda_0}^{x_0 + \lambda_0} f(t) dt$. Therefore the set $\{x \in I : f(x) > f(x_0)\}$

has measure zero, and is empty because of the lower semicontinuity of $f = Mf$.

Using observation 1 we show that the equality:

$$\min_{[\xi, \eta]} f = \min \{f(\xi), f(\eta)\}$$

holds whatever ξ, η with $\xi < \eta$. We shall denote this equality by $P(\xi, \eta)$.

Let $f(\xi) \geq f(\eta)$ (the same applies if $f(\xi) \leq f(\eta)$). Because of the lower semicontinuity of f , proof is immediate if there are no interior local minimum points of $J =]\xi, \eta[$, and is still immediate when there are such points, where f attains different values from $\min f(J)$. Let then $\alpha \in]\xi, \eta[$ so that $f(\alpha) = \min f(J)$.

If

$$\mu = \sup \{t > 0 : f \text{ constant on } [\alpha, \alpha + t[\},$$

since by observation 1 $\alpha + \mu$ is not a local minimum for f , it follows that $\alpha + \mu \geq \eta$: therefore $f(\alpha) = f(\eta)$ as we wished to prove.

We may also note that:

OBS. 2. If $y \in \mathbb{R}$ is such that:

- i) y is not a point of local minimum for f
- ii) $\exists \bar{y} < y : f(y) = \min_{[\bar{y}, y]} f$.

Then the function f is strictly decreasing on $[y, +\infty[$.

Whatever $x > y$, we cannot have $f(y) \leq f(x)$, otherwise i) would not hold because of $P(y, x)$ and ii). Still because of $P(y, x)$, $f(x)$ is the minimum of f on $]y, x[$. Therefore f decreases on $[y, +\infty[$.

If there were an interval $]x_1, x_2[$ where f is constant, because of the lower semicontinuity of f point $x_0 = \inf \{t \in \mathbb{R} : f \text{ constant on }]t, x_2[\}$ would be of local minimum for f , which is absurd because of observation 1.

From observations 1 and 2 we deduce immediately that if there is a local minimum point x_0 for f , there are also $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ so that f is strictly increasing on $] -\infty, x_0 - \lambda [$, constant on $]x_0 - \lambda, x_0 + \lambda'[$ and strictly decreasing on $[x_0 + \lambda', +\infty[$.

Therefore f attains its maximum at each point of local minimum, and this applies to each function coinciding with its maximal function. Supposing f not to be constant, we shall build a function g so that $Mg = g$ for which the previous conclusion does not apply, and this shall prove our statement.

Let us first show that, if f has no points of local minimum, limits $\lim_{x \rightarrow +\infty} f$ and $\lim_{x \rightarrow -\infty} f$ exist. Let $u, v \in \mathbb{R}$ so that $f(u) > f(v)$ and let for instance $u < v$ (the same applies if $u > v$). Because of observation 2 f decreases strictly on $[v, +\infty[$; if f does not decrease strictly on \mathbb{R} , the infimum x_0 of the set $\{v: f \text{ decreases strictly on } [v, +\infty[\}$ is finite, and therefore f increases on $] -\infty, x_0 [$.

Supposing f , equal to Mf , not constant, we can now build our function G . If $\phi = f - \inf f$, we get $M\phi = \phi$, and consequently, from above, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi = h$ exists. Obviously

$h = 0$: if $h > 0$, we would have for $0 < k < h$ an interval I not bounded above so that $\phi \geq k \cdot \chi_I$, from which $\phi = M\phi > M(k \cdot \chi_I) \geq \frac{k}{2} > 0$ which is absurd. We similarly deduce that $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi = 0$.

Let $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ so that $\gamma < \alpha < \beta$, $\phi(\alpha) > 0$, $\phi(\beta) < \frac{\phi(\alpha)}{2}$, $\phi(\gamma) < \frac{\phi(\alpha)}{2}$. Obviously the function $\psi(x) = \phi(x - \beta + \gamma)$ is such that $M\psi = \psi$, and $\phi + \psi = M(\phi + \psi)$. If $G = \phi + \psi$, we have $G(\beta) < \phi(\alpha)$ and $G(\alpha) \geq \phi(\alpha)$, $G(\alpha + \beta - \gamma) \geq \phi(\alpha)$. Because of $P(\alpha, \beta)$ and $P(\beta, \alpha + \beta - \gamma)$ applied to G , the point β is of local minimum for G and not of maximum because $G(\alpha) > G(\beta)$.

We shall end by noticing that from the above result one can immediately prove that for $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, if $n \geq 3$ being

$$(4) \quad Mf \leq K \cdot f \quad \text{a.e.} \quad (K = \text{constant} > 1)$$

the inequality:

$$(5) \quad \int_0^t f^* \leq K \cdot f^*(t)$$

where f^* is the decreasing rearrangement of f ⁽¹⁾, is not implied with the same constant. That is if implication (4) \Rightarrow (5) held, (5) should be verified by a not constant function f (so that $Mf = f$) $\forall K > 1$ and therefore also for $K = 1$. The

following $\int_0^t f^* = f^*(t)$ would also apply, therefore f^* is constant, that is f constant, contrary to our assumption.

We must bear in mind however that condition (4) implies:

$$\int_0^t f^* \leq c \cdot f^*(t) \quad \text{with} \quad c = c(n, K) > 1$$

and consequently ([2]) $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ for some $p > 1$.

 (1) That is $f^*(t) = \sup_{|E|=t} \inf_E f$

BIBLIOGRAPHY

- [1] Gilbarg-Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer, 1983, p. 14
- [2] C.Sbordone: Higher integrability from reverse integral inequalities, Proc. of the International Meeting dedicated to the memory of Prof. Carlo Miranda (Naples, September 13-16, 1982)
- [3] E.M.Stein: Singular integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press (1970).

Nota di de Alteriis Elisabetta, Parascandola Palma e Pecorella M. Antonietta **

Presentata dal Socio Vincenzo Scardi

Adunanza del 7 novembre 1987

Riassunto. Viene presentato un metodo per la misura della diffusione in gel irreversibili di gelatina.

Abstract. A method for measuring the diffusion in irreversible gelatin gels is presented.

Introduzione

Per l'immobilizzazione dei biocatalizzatori, siano essi enzimi o cellule microbiche, oggi si ricorre preferenzialmente al cosiddetto metodo dell'intrappolamento. Questo consiste nell'inglobare il biocatalizzatore in un gel polimerico il cui reticolo sia fitto quanto basta per trattenere il biocatalizzatore, ma non i substrati e i prodotti della reazione. Sebbene storicamente il gel di poliacrilammide sia stato il primo polimero proposto per tale uso (1), il primo ad essere stato adottato per preparare biocatalizzatori immobilizzati destinati ad usi industriali (2), la preferenza in generale è sempre stata accordata ai gel polimerici naturali. Il motivo di ciò è da ricercarsi nel fatto che le molecole enzimatiche o le cellule microbiche restano intrappolate nelle maglie del polimero all'atto della gelificazione (transizione sol→gel) che, nel caso dei polimeri naturali, avviene in condizioni blande, tali cioè da non danneggiare il biocatalizzatore, contrariamente a quanto avviene nel caso dei polimeri sintetici, come ad es. la già ricordata poliacrilammide.

I polimeri naturali più comunemente usati sono tre eteropolisaccaridi di origine

* Lavoro eseguito nell'ambito del Progetto Strategico "Biotecnologie" del CNR.

**Dip.to di Fisiologia Generale ed Ambientale, Catt.ra di Chimica delle Fermentazioni e Batteriologia industriale, Università di Napoli.

algale e precisamente l'agar, l'alginato (di Na) e la k-carragenina. Il meccanismo della gelificazione varia a seconda della natura del polimero. L'agar gelifica per semplice abbassamento della temperatura (da 60 °C a 30 °C), come pure la k-carragenina, la quale però può gelificare anche in presenza di ioni monovalenti (ad es. potassio, rubidio, cesio e ammonio), mentre l'alginato gelifica soltanto in presenza di ioni calcio o bario (gelificazione ionotropica).

All'elenco dei polimeri naturali va aggiunta la gelatina. Questa proteina, ottenuta per idrolisi parziale di una proteina animale assai diffusa (collagene), è stata impiegata nel 1980 dal nostro gruppo in un metodo di immobilizzazione per cellule di *Saccharomyces cerevisiae* (3), metodo successivamente perfezionato (4) ed esteso anche agli enzimi (5). Va detto, però, che la gelatina ha una caratteristica insolita per una proteina, ossia la reversibilità del sistema sol-gel. Una soluzione acquosa di gelatina (sol) passa rapidamente allo stato di gel se si raffredda di qualche grado al di sotto di 30-35 °C, ma ritorna altrettanto facilmente allo stato di sol non appena si supera la temperatura di gelificazione (che dipende dalla concentrazione della gelatina). Questa caratteristica ha fatto sì che la gelatina, nonostante tante sue ottime proprietà dal punto di vista biotecnologico (idrofilicità, *swelling*, forma e dimensioni molecolari, basso costo ecc.) sia stata per lungo tempo trascurata come matrice polimerica per l'immobilizzazione di biocatalizzatori. Infatti, questi ultimi vengono impiegati abitualmente a 30 °C o a temperature di poco superiori; inoltre, anche se la temperatura di transizione fosse più alta di 30-35 °C, la gelatina sarebbe comunque da escludere poiché in forma di gel essa ha scarsa resistenza meccanica. Pertanto, nel metodo messo a punto dal nostro gruppo (3,4) il gel viene stabilizzato mediante reticolazione con formaldeide (o glutaraldeide). Operando a circa -24 °C si ottiene un gel che, oltre a risultare dotato di notevole resistenza meccanica, presenta una struttura interna altamente porosa, se esaminato al microscopio elettronico a scansione.

Una delle limitazioni comuni a tutti i sistemi biocatalitici intrappolati in gel polimerici è quella relativa al trasporto di massa. Infatti, sia il substrato, che dall'esterno deve raggiungere per semplice diffusione il biocatalizzatore, sia i prodotti della reazione, che diffondono nella direzione opposta, incontrano una certa resistenza che dipende dal numero e dalla dimensione dei pori della matrice. La porosità, quindi, costituisce un parametro critico quando si deve scegliere quale gel

polimerico si debba impiegare per immobilizzare un determinato biocatalizzatore.

Nell'intrappolamento puramente fisico, i pori troppo larghi facilitano la diffusione di substrati e prodotti, ma al tempo stesso trattengono malamente il biocatalizzatore, causandone un certo rilascio indesiderato; i pori troppo stretti, invece, pur escludendo tale eventualità, limitano la diffusione all'interno del gel e quindi la produttività globale del processo controllato dal biocatalizzatore immobilizzato. Ne consegue che la conoscenza delle caratteristiche diffusionali di un gel polimerico è importante per ottimizzare sia forma e dimensioni dell'immobilizzato, sia il suo carico (rapporto ponderale tra cellule o enzima e matrice polimerica).

In letteratura sono reperibili dati sulla diffusione di composti semplici a basso peso molecolare (ad es. glicina, glucosio, saccarosio) attraverso gel di agar (6), gel di alginato (7) e gel di k-carragenina (8). Mancano, invece, dati relativi alla diffusione attraverso gelatina insolubilizzata, per il semplice motivo che questo tipo di matrice è stata impiegata finora soltanto dal nostro gruppo. Le varie tecniche di misura della diffusione descritte in letteratura per altri gel polimerici non hanno dato risultati soddisfacenti nel nostro caso. Si è reso, quindi, necessario mettere a punto una tecnica più adeguata alla gelatina insolubilizzata. La tecnica, di cui si parla in questa nota, è stata utilizzata per misurare la diffusione del glucosio, ma ovviamente può essere impiegata per qualsiasi altro composto a meno che esso non interagisca chimicamente con la gelatina. Inoltre, la tecnica è valida per misurare la diffusione in qualsiasi altro gel polimerico purchè ottenibile sotto forma di dischi.

Materiali e metodi

La gelatina è stata fornita dalla Deutsche Gelatine-Fabriken Stoess (Eberbach, D). Il glucosio e gli altri composti chimici usati come reagenti erano prodotti puri di varia provenienza. Per la determinazione quantitativa del glucosio è stato usato il kit di reattivi GOD-Perid della Boehringer Biochimica Robin (Milano).

Preparazione della gelatina insolubilizzata. La soluzione di gelatina (1g) in acqua (9,5 ml), ottenuta riscaldando per 15 min in b.m. bollente, veniva raffreddata a 40 °C prima di aggiungervi una soluzione (0,5 ml) costituita da formaldeide al 20% in etanolo al 50%. Dopo aver lasciato reagire a 40 °C per 20 min, la miscela veniva versata

in uno stampo di plexiglas come quello illustrato in Fig.1, che consente di ottenere il gel insolubilizzato sotto forma di dischi del diametro di 2,5 cm e di spessore variabile a piacere. Lo stampo era immediatamente posto in un *deep-freezer* a $-24\text{ }^{\circ}\text{C}$ e

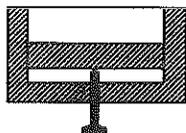


Fig.1. Stampo utilizzato per ottenere dischi di gelatina insolubilizzata di spessore variabile.

ivi tenuto per almeno 4 h prima di riportarlo gradatamente a temperatura ambiente. Il disco veniva abbondantemente lavato con acqua deionizzata e conservato in soluzione di NaCl allo 0,9% in frigorifero ($5-10\text{ }^{\circ}\text{C}$) fino al momento dell'uso.

Cella di diffusione. Per le misure di diffusione è stata usata una cella in plexiglas appositamente costruita (Fig.2). Essa consta di due parti simmetriche, A e B, munite di flange con fori passanti (1) per l'assemblaggio (mediante perni filettati e gallet-

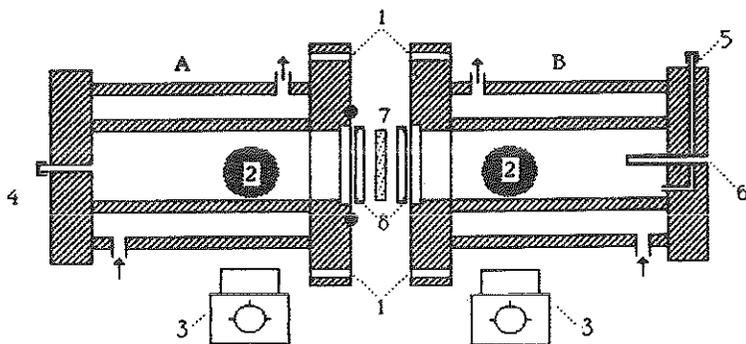


Fig.2. Rappresentazione schematica della cella di diffusione.

ti non mostrati in figura). Ciascuna parte della cella è munita, inoltre, di un'intercapedine per la circolazione dell'acqua di termostatazione e reca all'interno un'ancoretta sferica di ferro rivestita di teflon (2) azionata da un agitatore magnetico (3). La soluzione di cui si vuole misurare il coefficiente di diffusione viene introdotta attraverso un'apposita apertura (4) munita di sfiato (non mostrato in figura), mentre si riempie l'interno di B di un'uguale volume di acqua deionizzata attraverso un apposito capillare di acciaio inox (5). Dello stesso materiale è anche una guaina (6) per una sottile sonda termometrica (non mostrata in figura). Il disco di gelatina (7) viene mantenuto in sede grazie ad una coppia di apposite guarnizioni in teflon (8) scelte in funzione dello spessore del disco in esame. Attraverso il capillare (5) vengono prelevati a intervalli fissi (ogni 30 min) campioni ($<100 \mu\text{l}$) nei quali si misura la quantità di sostanza che dalla camera A è passata nella B per diffusione attraverso il disco di gelatina insolubilizzata.

Risultati e discussione

Come già detto, per la messa a punto del metodo è stato usato il glucosio, essendo esso un substrato universale nel mondo microbico, nonché il prodotto di numerose reazioni idrolitiche.

La Fig.3 mostra la curva di diffusione del glucosio (20 mM) attraverso un disco di gelatina insolubilizzata dello spessore di 0,36 cm (la superficie del disco misu-

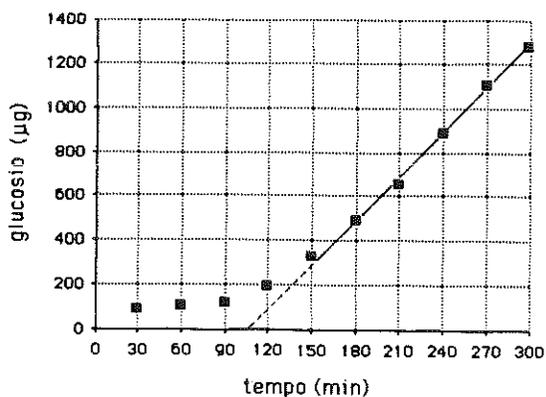


Fig.3. Curva di diffusione del glucosio in gelatina insolubilizzata (a 20 °C).

ra 4,9 cm²). Come si può osservare, la quantità complessiva di glucosio che diffonde cresce linearmente col tempo solo dopo che si è costruito un gradiente di concentrazione uniforme sulla faccia del disco in esame rivolta verso la parte B della cella. Il tempo necessario affinché ciò si realizzi è detto tempo di latenza (lag) e viene intercettato sull'asse delle ascisse prolungando la porzione lineare della curva di diffusione. Esso è, secondo Hannoun & Stephanopoulos (9), pari a h²/6D, dove h è lo spessore del disco e D il coefficiente di diffusione. Sebbene questo coefficiente si possa calcolare in base alla determinazione del tempo di latenza, una misura più accurata si ottiene in base alla seguente relazione:

$$D = \frac{h}{(C_1 - C_2)A} (dQ/dt)$$

dove C₁ e C₂ sono rispettivamente le concentrazioni del glucosio ai due lati del disco, A l'area di quest'ultimo e dQ/dt la pendenza della curva allo stato stazionario. Anche questo approccio non è esente da critiche (basti pensare che lo spessore e l'area del disco che si misurano non corrispondono a quelli effettivi, a causa della complessa struttura interna della gelatina reticolata), ma occorre tener presente che il nostro obiettivo non è la ricerca di valori assoluti. In altre parole, dal punto di vista biotecnologico interessa sapere come e in che misura influisce il grado di reticolazione di un gel sulla sua porosità e questa sulla sua resistenza meccanica e sull'efficienza del biocatalizzatore in esso immobilizzato. Da come varia la diffusione di un substrato in un gel, si possono avere utili indicazioni sulla porosità di quest'ultimo. Ad es. il coefficiente di diffusione del glucosio a 20 °C varia a seconda del rapporto ponderale tra gelatina e formaldeide:

Rapporto gelatina/HCHO	D (cm ² /s)
20:1	1,8 x 10 ⁻⁶
10:1	2,36 x 10 ⁻⁶
5:1	3,22 x 10 ⁻⁶

Un altro aspetto interessante è emerso comparando la resistenza diffusionale offerta al glucosio dal gel di gelatina e da quello di alginato di Ca. Sebbene con quest'ultimo gel il coefficiente di diffusione sia stato misurato con due tecniche distinte, una delle quali inadatta al caso della gelatina (10), esso risulta di molto superiore ($6,1 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$) ossia pressochè simile a quello del glucosio in acqua che è pari a $6,8 \times 10^{-6} \text{ cm}^2/\text{s}$ (9). Ciò sembrerebbe trovare un riscontro nel fatto che il gel di alginato di Ca si presenta come una matrice omogenea al microscopio elettronico a scansione, contrariamente alla gelatina reticolata. Il complesso intreccio di canalizzazioni e di cavità della gelatina reticolata creerebbe zone segregate, percorsi tortuosi il cui risultato altererebbe in modo sensibile il valore dello spessore del disco in esame misurato in base alla sua geometria. Tuttavia, i risultati di alcuni esperimenti tuttora in corso sembrano dimostrare che l'attività di un biocatalizzatore immobilizzato in alginato di Ca non differisce sostanzialmente da quella di un biocatalizzatore immobilizzato in gelatina reticolata.

L'argomento, come si vede, è lungi dal dirsi esaurito. La tecnica che abbiamo descritta non vuol essere altro che un contributo per rendere confrontabili i dati riguardanti la diffusione di una data sostanza in gel polimerici diversi, oppure quella di diverse sostanze in un medesimo gel in varie condizioni operative.

Bibliografia

1. Mosbach K. & Mosbach R. (1966) Acta Chem. Scand. **20**, 2807-10.
2. Chibata I. & Tosa T. (1977) Adv.in Appl.Microbiol. **22**, 1-27.
3. Gianfreda L., Parascandola P. & Scardi V. (1980) Eur.J.Appl.Microbiol. Biotechnol. **1**, 6-7.
4. Dhulster P., Parascandola P. & Scardi V. (1983) Enzyme Microb. Technol. **3**, 65-69.
5. de Alteriis E., Parascandola P., Salvatore S. & Scardi V. (1985) J.Chem. Technol.Biotechnol. **35B**, 60-64.
6. Suzuki S., Karube T., Kuriyama S., Suzuki N., Shirogami T. & Takamura T. (1980) Biochimie, **62**, 355-58.
7. Hackel U., Klein J., Megnet R. & Wagner F. (1975) Eur.J.Appl.Microbiol. Biotechnol. **1**, 291.
8. Chibata I. (1978) Enzyme Eng. **4**, 335-337.
9. Hannoun B.J.M. & Stephanopoulos G. (1986) Biotechnol.Bioeng. **28**, 829-835.
10. Nguyen A.L. & Luong J.N.T. (1986) Biotechnol.Bioeng. **28**, 1261-67.

La presente nota è stata giudicata degna di pubblicazione da una commissione composta dai soci P. Corradini, L. Jannelli e V. Scardi.

COMPARATIVE HISTOCHEMICAL STUDY OF ACTOMYOSIN ATPASE ACTIVITY OF
THE BODY WALL MUSCLE OF PHLEBOBRANCHIA AND STOLIDOBRANCHIA
ASCIDIANS.

Mario de Vincentiis, Roberto Gualtieri,

Giovanni Iazzetti and Silvia Scippa

II Chair of Histology and Embryology, Faculty of Sciences,
University of Naples and Zoological Station of Naples

Nota presentata dal socio Mario de Vincentiis

Adunanza del 5 dicembre 1987

Riassunto

La localizzazione istochimica dell'attività actomiosino ATPasica è stata studiata nel muscolo della parete del corpo degli Ascidiacei *Phallusia mammillata*, *Ciona intestinalis*, *Microcosmus sulcatus* e *Styela plicata*. I risultati hanno mostrato una irregolare distribuzione dell'attività enzimatica lungo le fibre muscolari. Nessuna variazione di questa attività è stata osservata variando il pH del mezzo di incubazione entro l'intervallo fra pH 4.9 e pH 10.0. I dati ottenuti vengono discussi facendo riferimento alle caratteristiche dei muscoli lisci e striati di Vertebrati ed Invertebrati.

Abstract

The histochemical localization of actomyosin ATPase activity has been studied in the body wall muscles of the Ascidians *Phallusia mammillata*, *Ciona intestinalis*, *Microcosmus sulcatus* and *Styela plicata*. The results show an irregular distribution of the enzymatic activity along the muscle fibres. No variation was observed varying the preincubation medium pH in the 4.9-10.0 pH range. The data are discussed in relation to smooth and striated Invertebrate and Vertebrate muscles.

Introduction

Our previous histochemical study on actomyosin ATPase of the body wall muscle of the ascidian *Halocynthia papillosa* [1] showed many muscle fibres with a non-homogeneous enzymatic activity. We found, in fact, along the major axis of each fibre, histochemically stained zones alternating with unstained zones. We also found a non-homogeneous aspect of the single fibres, in histological preparations. Recently, in a light microscopic study, Terakado and Obinata [2] also reported the presence of many large granules in isolated cells from the outer muscle layer of *Halocynthia roretzi*. Ultrastructural and biochemical findings in *Halocynthia roretzi* muscles [3,4] supported the hypothesis that at least in the Ascidian genus *Halocynthia* the body wall muscle is "... intermediate between the striated and smooth muscle ..." [3].

Myosin ATPase was first observed in *Ciona intestinalis* and *Ascidia ceratodes* at neurulation, increasing from 25 to 50 times at the time of larval hatching [5]. In seven species of Ascidians, of the Phlebobranchia and Stolidobranchia orders, the

actomyosin ATPase of the body wall muscle, studied with a biochemical method, showed an inhibition of the enzymatic activity *in vitro* in the presence of vanadate [6].

The present study concerns the histochemical localization of the ATPase activity and the light microscopic morphological features of the single muscle fibres in the body wall muscle of Phlebobranchia (*Phallusia mammillata*, *Ciona intestinalis*) and Stolidobranchia (*Microcosmus sulcatus*, *Styela plicata*).

Material and Methods

Specimens of *Phallusia mammillata*, *Ciona intestinalis* (Phlebobranchia) *Microcosmus sulcatus* and *Styela plicata* (Stolidobranchia) were collected in the Gulf of Naples. In some cases, the animals were anaesthetized by placing them in 3 litres of sea water for 4-20 hrs, with some menthol crystals dissolved in it. Anyway, even after anaesthesia, the muscle continued to shrink upon dissection, also if in a lower extent. Body wall muscle sac pieces, obtained by removing the tunic, were placed on a cryostat support (IEC International Harris Cryostat, Model CT) in a drop of Tissue Tec OCT Compounds and quickly frozen by a jet of CO₂. Longitudinal serial sections 8-10 µm thick were made at -20, -25 °C. These sections were placed on glass slides and treated for the histochemical demonstration of myofibrillar ATPase activity (actomyosin ATPase) [7]. Alkaline (18 mM CaCl₂ in 100 mM 2-amino-2methyl-1-propanol pH 10.6, 10.4, 10.2 and 9.8) and acid (50 mM potassium acetate, 18 mM CaCl₂, pH 4.35, 4.5, 4.7, 4.9, and 5.2) preincubations were performed on unfixed sections since fixation markedly decreases the enzymatic activity. Preincubation times ranged from 5 to 30 minutes, and incubation times from 30 to 45 minutes.

As controls, sections were incubated either in a substrate-free medium or in a medium containing paracloromercuribenzoate at concentrations ranging from 10 μ M to 1 mM.

Morphological observations were made on paraffin-embedded material. This material was fixed in Bouin's fluid and stained with Pasini's method [8].

Results

Myofibrillar ATPase activity observed in the muscle fibres of the body wall of the Ascidian species studied is reported in Fig. 1 A, C, E and G. The sections showed some muscle fibres with a homogeneous enzymatic activity and others with histochemically stained zones alternating with unstained zones along the major axis of each fibre. No difference was observed between the internal and external muscle layers. The myofibrillar ATPase staining pattern in muscle samples from anaesthetized animals did not differ from that observed in animals not anaesthetized.

The histochemical reaction in each fibre was not modified by alkaline or acid preincubations at various pH values. Myofibrillar ATPase staining gradually disappeared outside the 4.9-10.0 pH range. The enzymatic activity was not detected by incubating the sections in a substrate-free medium or in a medium containing paracloromercuribenzoate at concentrations of 100 μ M or more.

The histological preparation (Fig. 1 B, D, F and H), also revealed a non-homogeneous aspect of the single fibres in longitudinal sections. Indeed, the different intensity of staining in different zones of the same fibre produced a banding pattern. The same aspect was found in anaesthetized samples.

Discussion

The present results show that the actomyosin ATPase of *Phallusia mammillata*, *Ciona intestinalis*, *Microcosmus sulcatus* and *Styela plicata* muscles is not uniformly distributed along the single fibres, as shown varying the medium pH values in the histochemical reaction. Stained and unstained tracts were also observed after Pasini control staining. These findings are consistent with those obtained in the Ascidian Stolidobranchia *H. papillosa* muscle [1].

Generally, in the smooth Invertebrate and Vertebrate muscles, the localization of actomyosin ATPase is homogeneous along the single fibres [9]. Based on the intensity of the reaction, various fibre types are recognizable in striated muscles of Invertebrates and Vertebrates. In the latter, the actomyosin ATPase reaction intensity varies when the medium pH is changed [10,11].

A rethinking of the early classification of the Ascidian body wall muscle as a typical smooth muscle [12] is also prompted by recent physiological and ultrastructural studies of *Ciona intestinalis* [13] and light and electron-microscopic observations on isolated muscle cells of *Halocynthia roretzi* [2]. In both specimens functional and ultrastructural aspects are more similar to Vertebrate skeletal muscle than to smooth one. Also the molecular and enzymatic properties of contractile (myosin) and regulatory (troponin) proteins of *Halocynthia roretzi* body wall muscle are very similar to those of the rabbit skeletal muscle proteins [14].

The peculiar distribution of actomyosin ATPase activity along the single fibres previously reported [1] and confirmed by the present study, is an uncommon feature which is not found

either in striated and smooth muscles of Invertebrate and Vertebrate. Moreover, the new data described helps to clarify the actomyosin ATPase pattern in Ascidian muscle fibres.

References

- 1 de Vincentiis M., Gualtieri R., Iazzetti G. and Scippa S. (1985) Histochemical study of actomyosin ATPase activity of the body wall muscle of the Ascidian *Halocynthia papillosa*. Rend. Acc. Sci. Fis. Mat. (Napoli) LII:9-15
- 2 Terakado K. and Obinata T. (1987) Structure of multinucleated smooth muscle cells of the Ascidian *Halocynthia roretzi*. Cell Tissue Res. 247:85-94
- 3 Shinohara Y. and Konishi K. (1982) Ultrastructure of the body wall muscle of the Ascidian *Halocynthia roretzi*: smooth muscle cells with multiple nuclei. J. Exp. Zool. 221:137-142
- 4 Toyota N., Obinata T., Terakado K. (1979) Isolation of troponin-tropomyosin-containing thin filaments from ascidian smooth muscle. Comp. Biochem. Physiol. 62B:433-441
- 5 Meedal T.H. (1983) Myosin expression in the developing Ascidian embryo. J. Exp. Zool. 227:203-212
- 6 Michibata H., Nishiyama I., Gualtieri R. and de Vincentiis M. (1985) Inhibition by vanadate of actomyosin ATPase extracted from Ascidians. Comp. Biochem. Physiol. 80B:247-250
- 7 Guth L. and Samaha F.J. (1970) Procedure for the histochemical demonstration of actomyosin ATPase. Exp. Neurol. 28:365-367
- 8 Gray P. (1954) The microtome's formulary and guide. The Blakiston Company inc., New York & Toronto
- 9 Gilloteaux J and Stalmans-Falys M. (1979) Histochemical

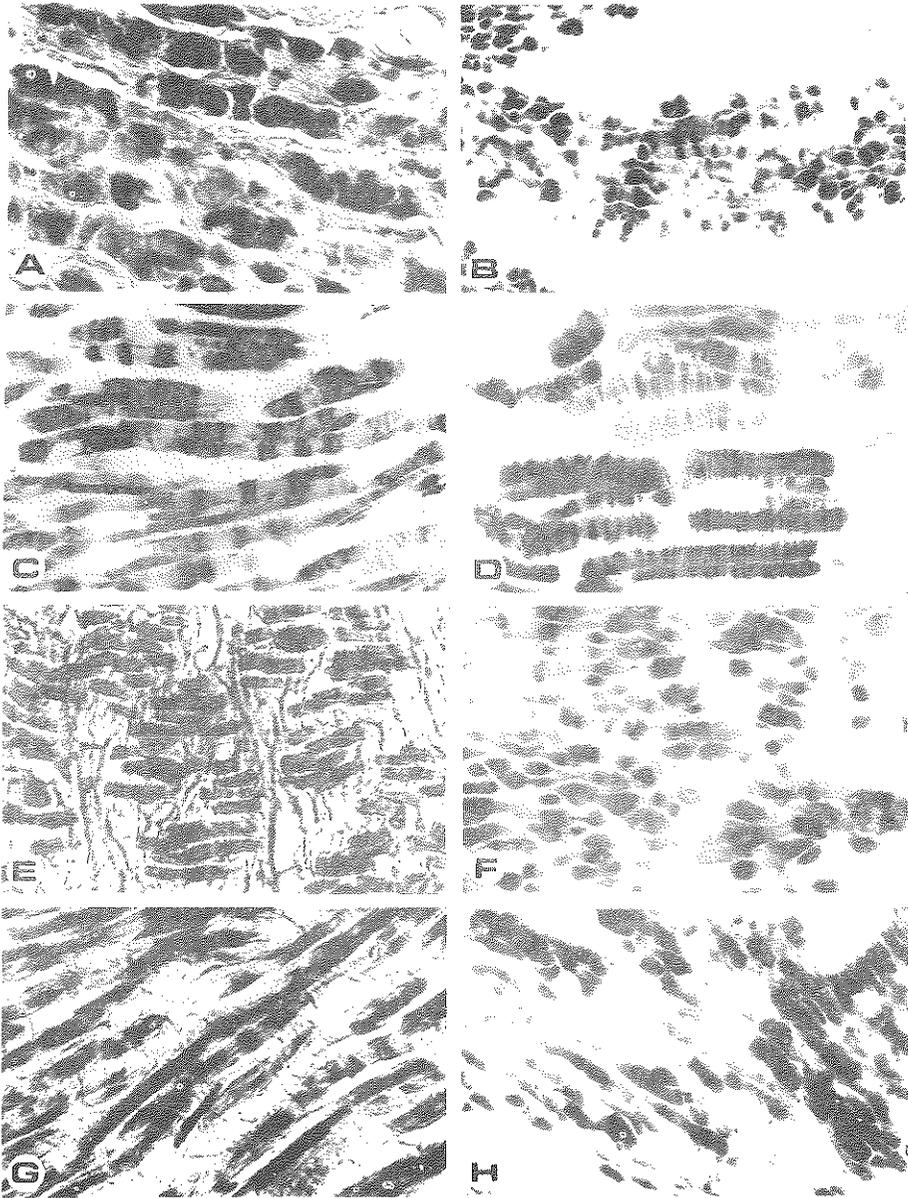
characteristics of a tonic smooth muscle. Histochemistry 63:57-68

- 10 Maier L., Rathmayer W. and Pette D. (1984) pH lability of myosin ATPase activity permits discrimination of different muscle fibre types in Crustaceans. Histochemistry 81:75-77
- 11 Staron R.S. and Pette D. (1986) Correlation between myofibrillar ATPase activity and myosin heavy chain composition in rabbit muscle fibers. Histochemistry 86:19-23
- 12 Hanson J. and Lowy J. (1960) Structure and function of the contractile apparatus in the muscles of invertebrate animals. in "The structure and function of muscle". Ed. by G.H.Bourne, Academic Press, New York, vol.I, pp.268-335
- 13 Newitt G. and Gilly WM.F. (1986) Morphological and physiological properties of non-striated muscle from the Tunicate, *Ciona intestinalis*: parallels with Vertebrate skeletal muscle. Tissue Cell 18:341-360
- 14 Takito J. and Konishi K. (1986) Enzymatic properties of myosin from Ascidian body-wall smooth muscle. Comp. Biochem. Physiol. 84B:59-62

LEGEND

FIG.1 Left column: the histochemical reaction of actomyosin-ATPase activity in the muscle wall fibres; right column: the relative Pasini's staining of *Microcosmus sulcatus* (A,B), *Styela plicata* (C,D), *Ciona intestinalis* (E,F), and *Phallusia mammillata* (G,H).

A x270; B x675; C x360; D x675; E x675; F x675; G x270; H x675.



EVIDENZE DI UN'AREA DI SCARPATA MESOZOICO-TERZIARIA
NEI DOMINI DELLA PIATTAFORMA CARBONATICA CAMPANO-LUCANA
MONTI DELLA MADDALENA, APPENNINO MERIDIONALE

Nota di Ennio Marsella (*) e Gerardo Pappone (*)
presentata dal socio ordinario Bruno D'Argenio
Adunanza del 5 dicembre 1987.

ABSTRACT

Facies analysis in the Monti della Maddalena (Campania-Lucania border) have revealed a large amount of mesozoic resedimented carbonatic deposits of mass flow origin with very large stratigraphic gaps and erosive contacts, suggesting a well individuated scarp to basin environment for these sediments.

RIASSUNTO

L'analisi delle successioni Mesozoico-Terziarie affioranti nei Monti della Maddalena (confine campano-lucano), costituite prevalentemente da risedimenti carbonatici dovuti a meccanismi di tipo mass flow e caratterizzate da ampie lacune stratigrafiche, permette di individuare un ambiente di scarpata attivo per tutto il Mesozoico e parte del Terziario e strettamente connesso ai domini dell'adiacente bacino Lagonegrese.

(*) Dipartimento di Scienze della Terra - Università di Napoli - Largo San Marcellino, 10 - 80138 Napoli

INTRODUZIONE

I Monti della Maddalena, ubicati lungo il confine campano-lucano, nell'area compresa tra gli abitati di Vietri di Potenza e Caggiano a nord, Padula, Montesano sulla Marcellana e Paterno a sud, costituiscono una dorsale carbonatica allungata in direzione NNO-SSE e bordata ad ovest dal Vallo di Diano, che la separa dai massicci carbonatici appartenenti all'Unità Alburno-Cervati, e ad est dalla Valle del Fiume Melandro e dalla Val d'Agri che la dividono dagli estesi affioramenti dei terreni dell'Unità Lagonegrese (SCANDONE, 1967, 1972; MARSELLA, 1987) (Fig 1).

Le successioni costituenti l'Unità Monti della Maddalena (D'ARGENIO et al., 1975) sono costantemente caratterizzate da lacune stratigrafiche di notevole ampiezza e collocate a differenti altezze stratigrafiche (SCANDONE e BONARDI, 1968). Tale Unità, derivata dallo smembramento della Piattaforma Carbonatica Campano-Lucana, avvenuta durante la tetto-genesi Neogenica (D'ARGENIO et al., 1975) e considerata come il "margine" orientale di questo dominio paleogeografico (SCANDONE e BONARDI, 1968), risulta tettonicamente sottoposta alle successioni carbonatiche mesozoico-terziarie dell'Unità Alburno-Cervati (BONI et al., 1974; DE ALFIERI et al., 1987) e sovrascorsa sull'Unità Lagonegrese (SCANDONE, 1967, 1972) affiorante in finestra tettonica nei dintorni di Padula e Sala Consilina (settore meridionale dei Monti della Maddalena).

ANALISI DI FACIES.

Dolomie e calcari dolomitici del Trias sup-Infralias.

Nell'area dei Monti della Maddalena affiora estesamente una formazione dolomitica basale che, in accordo con gli Autori precedenti (SCANDONE, 1964; SCANDONE e BONARDI, 1968) viene attribuita al Trias sup.-Infralias sulla base di ritrovamenti di Gervilleia exilis STOPPANI, Wortenia-solitaria BENECKE e Megalodon sp. L'intervallo dolomitico, sovente estremamente cataclastico, viene stimato intorno ai 500 m di spessore.

Il settore meridionale, tra Montesano sulla Marcellana e Paterno, e' caratterizzato da sequenze cicliche di depositi di "retroscogliera" (dolomie con rari Megalodon) e di piana tidale (dolomie stromatolitiche e loferitiche). Nei sedimenti subtidali prelevati in questa area sono state individuate in sezione sottile, le seguenti forme: Thaumatoporella sp., Heteroporella sp. e Cianofeece, foraminiferi arenacei e frammenti di gasteropodi

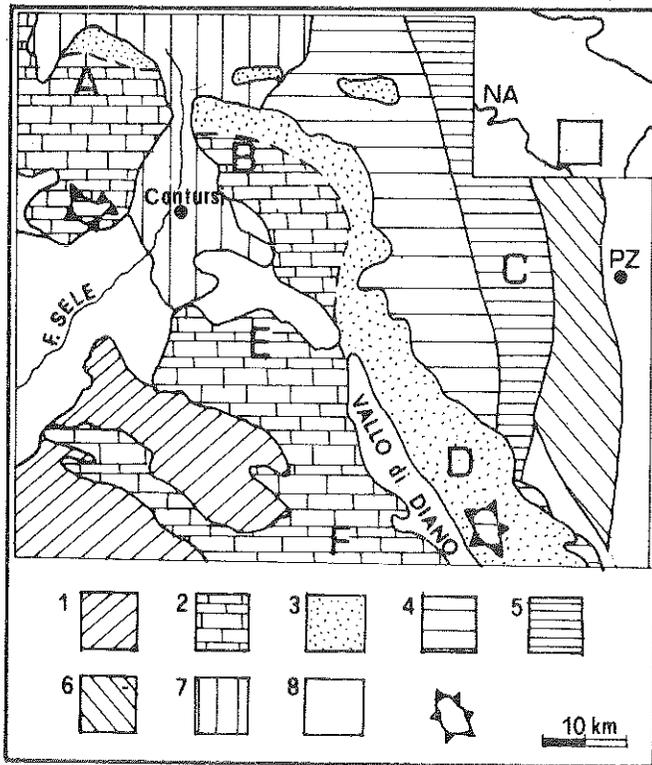


Fig.1 - Schema delle facies del sistema piattaforma carbonatica-scarpata-bacino nell'area studiata. LEGENDA: A) M. Cervialto; B) M. Marzano; C) Area di affioramento dei terreni appartenenti all'Unità Lagonegrese; D) Monti della Maddalena; E) M. Alburno; F) M. Cervati .- 1) Unità Liguridi (Flysch interni); 2) Unità Alburno-Cervati (Facies di retroscogliera); 3) Unità M. Marzano Monti della Maddalena (Facies di scarpata); 4), 5), 6), Unità Lagonegrese (Facies di bacino prossimale, intermedia, distale); 7) Unità Irpine (Flysch esterni); 8) Depositi del Quaternario; 9) Finestra tettonica.

Nel settore settentrionale invece, procedendo da ovest verso est, si rileva un brusco cambiamento di facies. Infatti lungo la strada che congiunge Caggiano a Vietri di Potenza e' possibile osservare che le alternanze carbonatiche in facies di "retroscogliera" e di piana tidale affioranti nei dintorni di Caggiano, sono sostituite nell'area compresa tra gli abitati di Sant'Angelo le Fratte e Vietri di Potenza da depositi interpretabili come dovuti a "mass flow".

Tali depositi rappresentano facies di scarpata di piattaforma carbonatica e sono costituiti da elementi (dimensioni da cm a dm)

provenienti in parte dalle successioni triassiche (dolomie stromatolitiche) e in parte da clasti di calcari con selce, immersi in una matrice dolomitica, spesso prevalente.

Calcareniti e brecce del Malm?-Cretacico inf.

Giacenti a luoghi sull'intervallo precedente, seguono calcareniti e calciruditi grigio scuro, con stratificazione indistinta a causa dell'intensa fratturazione. Tale intervallo attribuito dagli autori precedenti al Malm (SCANDONE e BONARDI, 1968; G 11 del foglio geologico n 199, Potenza) ha uno spessore massimo di 100-130 m e geometrie di affioramento lenticolari; esso e' caratterizzato da un livello basale di brecce dolomitiche con clasti contenenti lamine stromatolitiche e granuli ricoperti provenienti dai livelli dolomitici basali, immersi in una matrice doloarenitica. In sezione sottile negli elementi delle brecce si sono riconosciuti: Protopeneroplis striata e aculei di echinidi.

Seguono calciruditi formate da litoclasti di differente forma (da angolare a subarrotondata) ed eta' e da bioclasti costituiti da alghe, foraminiferi, gasteropodi, coralli, Ellipsactinie e frammenti di echinodermi. Nella matrice l'analisi in sezione sottile dei livelli stratigrafici piu' alti ha messo in evidenza: Salpingoporella sp., Clypeina jurassica FAVRE, Bacinella irregularis ?, miliolidi e gasteropodi. Il contenuto in fossili suggerisce per questo intervallo un'eta' non piu' antica del Cretacico inferiore.

Calcareniti e brecce del Cretacico sup. e dell'Eocene.

Una successione potente 400 m circa, ma con forti variazioni laterali di spessore, costituita da calcareniti e calciruditi ricristallizzate (Calcari Pseudosaccaroidi Bianchi, PESCATORE, 1964, 1965; Calcari Cristallini Auct.), affiora estesamente in tutta l'area. Tale successione di eta' Campaniano-Maastrichtiana presenta, talvolta alla sommita', un intervallo eocenico e poggia di norma, con un contatto di tipo erosivo, sia sulle dolomie basali che sui sedimenti del Malm?-Cretacico inf.. In una delle localita' dove meglio sono esposti questi terreni (Monte il Crocifisso, presso Brienza) sono stati riconosciuti:

a) 130 m di brecce stratificate in livelli da 30 a 70 cm i cui litoclasti sono costituiti da calcari oolitici e calcilutiti di diversa forma (da arrotondata ad angolare) e dimensione (da 10 a 50 cm) provenienti dalle successioni giurassiche e cretache in facies di retroscogliera. Piu' raramente, e nella parte bassa dell'intervallo, sono stati individuati

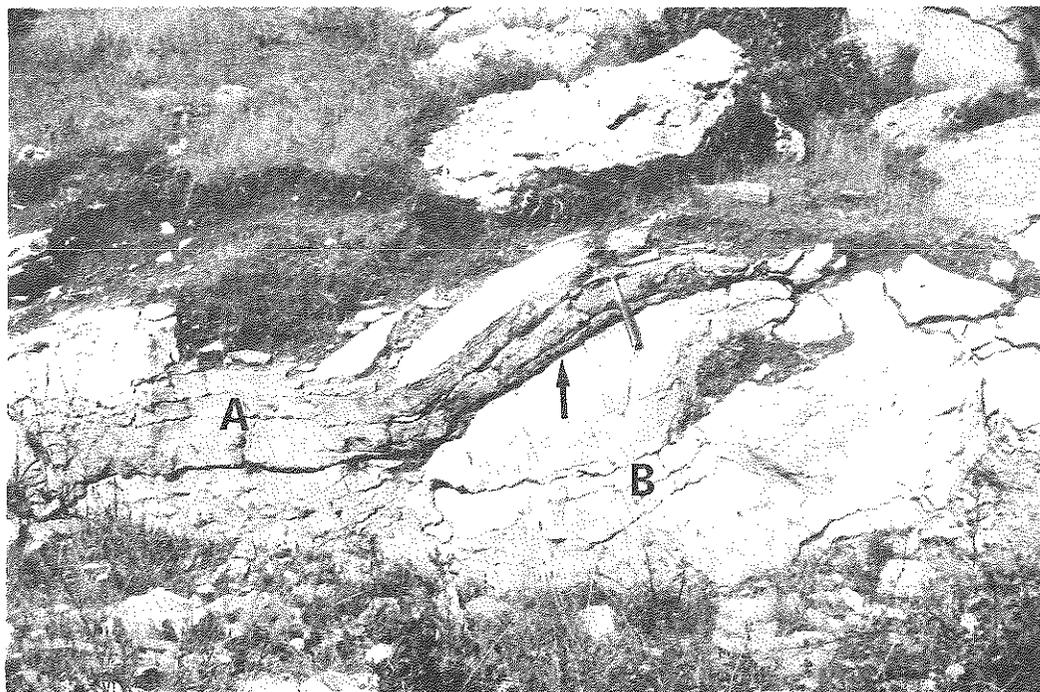


Fig. 2 - Località Toppo Avezzale N-O di Brienza (Monti della Maddalena).
Calcareniti del Miocene inf. (A) discordanti sui depositi del Cretacico
sup.-Terziario (B).

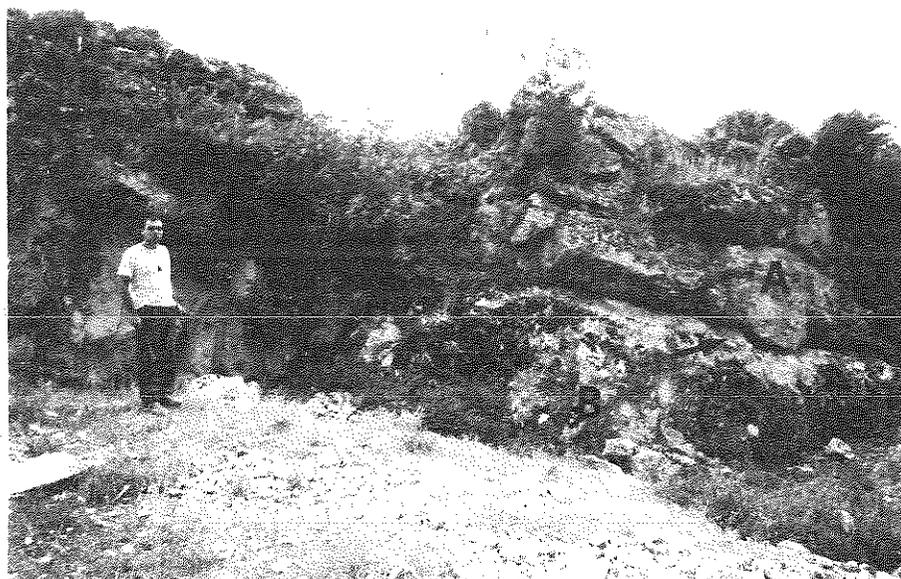


Fig. 3 - Località Sant'Angelo Le Fratte (Monti della Maddalena). Depositi
del Cretacico sup.-Terziario (A) discordanti sulle dolomie del Trias
sup.-Infralias (B).

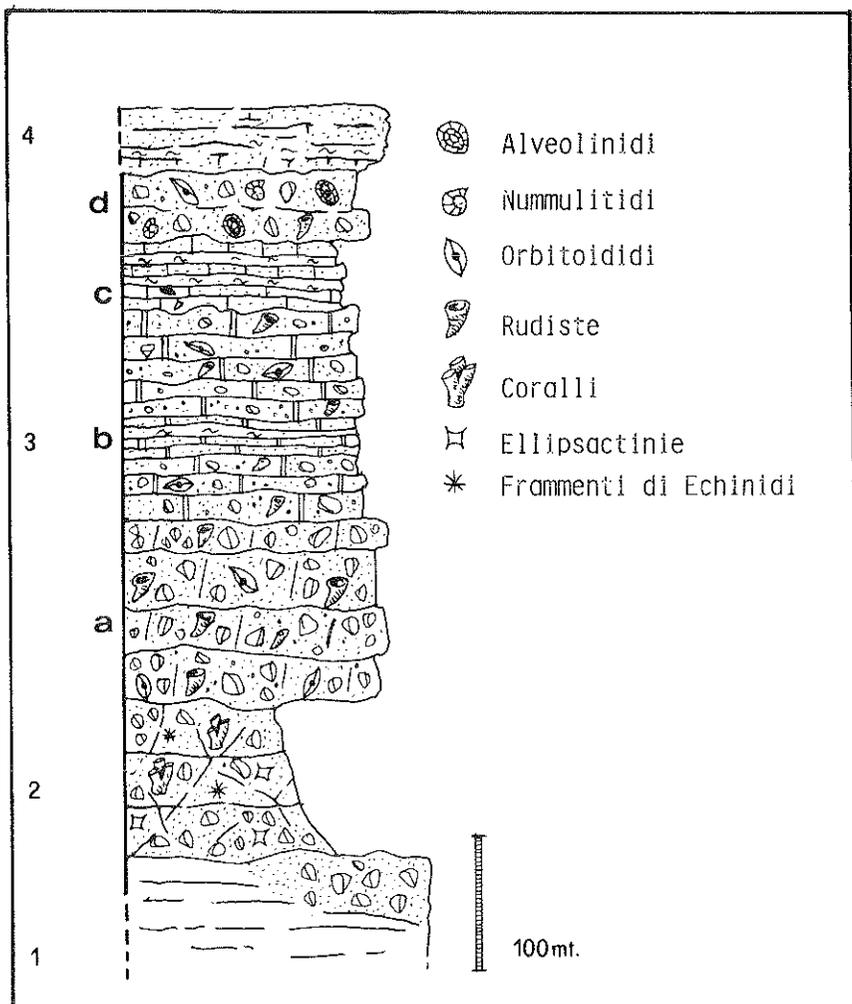


Fig. 4 - Colonna stratigrafica della successione del Monte "Il Crocifisso" nei pressi di Brienza. LEGENDA : 1) Dolomie e calcari dolomitici del Trias sup.-Infralias; 2) Calcareniti e Breccie del Malm ?-Cretacico inf.; 3) Calcareniti e breccie del Cretacico sup. (a, b, c,) -Terziario (d); 4) Depositi terrigeni del Miocene inferiore.

clasti provenienti da livelli triassici. Rudiste intere o in frammenti sono molto frequenti sia nei clasti che nella matrice. In sezione sottile sono stati riconosciuti: *Orbitoides* sp. nella matrice e, all'interno dei clasti, frammenti di *Ellipsactinia* e frammenti di gusci di lamellibranchi;

b) 170 m di calcareniti e calciruditi stratificate in livelli da 20 a 30 cm. I litoclasti, di dimensioni inferiori rispetto a quelli

dell'intervallo precedente (max 10 cm), sono prevalentemente formati da calcilutiti con frammenti di Rudiste. Nella matrice si ritrovano: Orbitoides sp., frammenti di Radiolites sp. e frammenti di coralli. La parte intermedia di questo intervallo e' caratterizzata dalla presenza di calcareniti e rare calciruditi, piu' sottilmente stratificate (5-10 cm) e con sottili spalmature di marne verdognole;

c) 50 m di calcareniti stratificate in livelli dello spessore di 5-10 cm, con numerose intercalazioni di sottili livelli di marne verdastre. Nella parte alta di questo intervallo sono presenti slumping. L'associazione micropaleontologica e' costituita da: Solenoporacee, Orbitoides sp., Siderolites sp., spugne, organismi coloniali e frammenti di Radiolites sp.;

d) 50 m di calcareniti e calciruditi mal stratificate con elementi di varia forma e dimensione, immersi in una matrice di taglia arenitico-lutitica. I litoclasti possono raggiungere anche dimensioni di 50 cm e provengono dalla sottostante successione dei Calcari Pseudosaccaroidi e dalle successioni giurassico-cretaciche di piattaforma carbonatica in facies di "retroscogliera". E' stato riconosciuto un minor grado di ricristallizzazione in tale intervallo. L'associazione faunistica e' costituita da: Solenoporacee, Corallinacee, Nummulitidi, Alveolina sp., Discorbidi, Operculina sp., rari Miliolidi, e numerose forme rimaneggiate (Orbitoides sp.). L'eta' di questo intervallo e' presumibilmente eocenica.

Seguono poi terreni del Miocene inf. ampiamente descritti in letteratura (SCANDONE e BONARDI, 1968; Foglio Geologico n° 199, Potenza).

DISCUSSIONE

I dati precedentemente espósti consentono di interpretare i sedimenti carbonatici giurassico-cretacici affioranti nei Monti della Maddalena, come dovuti a meccanismi di tipo mass flow, depositi in ambienti di scarpata che raccordavano la Piattaforma Carbonatica Campano-Lucana all'adiacente Bacino Lagonegrese. Alcune evidenze (brecce, risedimenti) nei depositi del Triassico sup.-Infralias, fino ad oggi considerati esclusivamente come sedimenti di acqua bassa (SCANDONE e BONARDI, 1968), suggeriscono invece che nei domini paleogeografici a cui i Monti della Maddalena appartengono, ambienti di scarpata carbonatica possano essersi delineati gia' a partire dal Triassico sup..

I processi deposizionali relativi a questi ambienti sedimentari sono stati per molti anni oggetto di studi parziali o affrontati marginalmente in lavori a carattere piu' generale. L'importanza di tali

processi e' stata a lungo sottovalutata. Inoltre, le modalita' di ridistribuzione dei sedimenti carbonatici sono state studiate con modelli sedimentologici pensati e costruiti per gli ambienti silico-clastici (NORMARK, 1970; MUTTI e RICCI LUCCHI, 1972; WALKER e MUTTI, 1973) e che, pertanto, solo in parte, potevano affrontare le problematiche tipiche degli ambienti carbonatici. Dalla fine degli anni '70 ad oggi, grazie soprattutto alla diffusione di tecnologie avanzate (batiscafi, profili sismici, carotaggi) sono stati prodotti numerosi lavori riguardanti i sistemi piattaforma carbonatica-scarpata-bacino attuali ed e' stata proposta una modellistica nuova per le modalita' di distribuzione dei risedimenti carbonatici in questi ambienti. Tale modellistica e' stata poi utilizzata anche per argomenti a carattere esclusivamente geologico (COOK e ENOS, 1977; COLACICCHI e BALDANZA, 1986). Gli elementi piu' importanti da considerare nell'analisi dei modelli deposizionali in sistemi piattaforma carbonatica-scarpata -bacino, sono:

- a) le scarpate carbonatiche modificano profondamente la loro morfologia nel tempo (SCHLAGER e GINSBURG, 1981; SCHLAGER e CAMBER, 1986) e, in funzione della loro altezza e/o della loro acclivita', sono sede di regimi di "deposizione", di "by-pass", o di "erosione";
- b) la ridistribuzione dei sedimenti sulle scarpate e' largamente dovuta a fenomeni tipo mass-flow ed e' legata, piu' che a poche "sorgenti" puntiformi di risedimenti, a linee continue "sorgenti" (SCHLAGER e GINSBURG, 1981) per i materiali che, ridepositandosi, causano una distribuzione di facies in fasce parallele secondo uno stile ad "apron" o grembiule (MULLINS et al., 1984).

Una tale chiave interpretativa offre soluzione piu' agevoli ed alternative a quelle dei precedenti autori che utilizzano il meccanismo della emersione-erosione e successivo annegamento delle aree bordanti le piattaforme carbonatiche per interpretare l'evoluzione delle successioni affioranti nell'area in esame (SCANDONE e BONARDI, 1968) o piu' a nord (Matese occidentale; ACCORDI et al., 1982). In particolare:

- a) la presenza di ampie lacune stratigrafiche ed i contatti di tipo erosivo tra le differenti successioni dei Monti della Maddalena;
- b) la marcata differenza nell'evoluzione stratigrafica con l'adiacente Unita' Alburno-Cervati, costituita da una successione con sedimenti carbonatici in facies di "retroscogliera", sostanzialmente continua per tutto il Mesozoico, potente 4000 m circa ed affiorante sul lato opposto del Vallo di Diano;
- c) la distribuzione delle facies allineata NO-SE nei Monti della Maddalena;

indicano, per tali terreni, un'origine da un dominio di scarpata carbonatica in regime deposizionale di accrescimento prima, e poi, per la gran parte del Mesozoico, in regime deposizionale "erosivo" con morfologie della scarpata molto acclivi. Questo modello ben si accorda con la distribuzione da ovest verso est delle facies da prossimali a distali nei sedimenti delle successioni lagonegresi (MARSELLA, 1987) che testimonia la presenza di aree alimentatrici lungo una estesa fascia bordante le piattaforme carbonatiche mesozoiche e che, verosimilmente, era costituita almeno in parte, dall'attuale Unità dei Monti della Maddalena-Monte Marzano. E' interessante notare che alcuni livelli giurassico-cretacici della successione lagonegrese nei settori geograficamente adiacenti ai Monti della Maddalena-Monte Marzano (COCCO et al., 1974), sono costituiti da potenti bancate di calcareniti e breccie con clasti provenienti dalle aree di piattaforma carbonatica (alcuni livelli carbonatici risedimentati nel "Flysch Rosso" mostrano litologie del tutto simili a quelle dei "Calcari Pseudosaccaroidi" "Calcari Cristallini").

LAVORI CITATI

- ACCORDI G., CARBONE F., SIRNA G. (1982) - Relationships among tectonic setting substratum and benthonic communities in the upper Cretaceous north-eastern Matese (Molise Italy). *Geologica Romana*, 21, 755-793.
- BONI M., IPPOLITO F., SCANDONE P., ZAMPARELLI V. (1974) - L'Unità del Monte Foraporta nel Lagonegrese (Appennino meridionale). *Boll. Soc. Geol. It.*, 93, 469-512.
- COCCO E., CRAVERO F., ORTOLANI F., PESCATORE T., RUSSO M., TORRE M., COPPOLA L. (1974) - Le Unità Iripine nell'area a nord di Monte Marzano, Appennino Meridionale. *Mem. Soc. Geol. It.*, 13, 604-654.
- COOK H.E., ENOS P. eds. (1977) - Deep-water carbonate environments: SEPM Spec. Pub. n. 25, 336.
- COLACICCHI R. e BALDANZA A. (1986) - Carbonate turbidites in a Mesozoic pelagic basin: Scaglia formation, Apennines. Comparison with siliciclastic depositional models. *Sedimentary geology*, 48, 81-105
- D'ARGENIO B., PESCATORE T., SCANDONE P. (1975) - Structural pattern of the Campania-Lucania Apennines. In: *Structural Model of Italy*, Quad. Ric. Scient., 90, Ogniben L., Parotto M., Praturion A. (Eds.), 313-327, Roma.
- DE ALFIERI A., GUZZI R., SACCHI M., D'ARGENIO B., PERRONE V., ZAMPARELLI V.

- (1987) - Monte Foraporta unit: a minor element of Southern Apennine nappe pile. Stratigraphic and tectonic study. Rend. Soc. Geol. It., 9 (in press).
- MARSELLA E. (1987) - I terreni lagonegresi tra S. Fele e la Val D'Agri. Evoluzione tettonico-sedimentaria (Trias superiore-Giurassico). Tesi di Dottorato in Geologia del Sedimentario, pp.159. Univ. di Napoli.
- MULLINS H.T, HEATH K.C., VAN BUREN H.M., NEWTON C.R. (1984) - Anatomy of a modern open ocean carbonate slope: northern Little Bahama Bank. Sedimentology 31, 141-168.
- MUTTI E. e RICCI LUCCHI F. (1972) - Le torbiditi dell'Appennino settentrionale introduzione all'analisi delle facies. Mem. Soc. Geol. Ital., 11, 161-199
- NORMARK W. R. (1970) - Growth patterns of deep-sea fans. Bull. Am. Ass. Pet. Geol., 54, 2170-2195
- PESCATORE T. (1964) - Le facies di transizione nel gruppo del M. Marzano. Boll. Soc. dei Natur. in Napoli, 14, 149-158.
- PESCATORE T. (1965) - Ricerche sulla depressione molisano-sannitica. Atti Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli, 5, 101-145.
- SCANDONE P. (1964) - Trasgressioni mesozoiche e terziarie nell'alta valle dell'Agri tra Paterno e Marsico Nuovo (Potenza). Boll. Soc. dei Natur., 72, 125-131.
- SCANDONE P (1967) - Studi di geologia lucana: la serie calcareo-silico-marnosa e i suoi rapporti con l'Appennino calcareo. Boll. Soc. Natur. in Napoli, 76, 1-175.
- SCANDONE P. (1972) - Studi di geologia lucana: nota illustrativa della carta dei terreni della serie calcareo-silico-marnosa. Boll. Soc. Natur. in Napoli, 81, 225-300.
- SCANDONE P., BONARDI G. (1968) - Synsedimentary tectonics controlling deposition of mesozoic and tertiary carbonatic sequences of areas surrounding Vallo di Diano (Southern Apennines). Mem. Soc. Geol. It., 7, 1-10.
- SCHLAGER W. e CAMBER O. (1986) - Submarine slope angles, drowning unconformities and self- erosion of limestone escarpments. Geology, 14, 762-765.
- SCHLAGER W.e GINSBURG R. (1981) - Bahama carbonate platforms. The deep and the past. Marine Geology, 44, 1-24
- WALKER R.G., MUTTI E. (1973) - Turbidite facies and facies association. In G.V. Middleton and A.H. Bouma (Eds.), Turbidites and Deep-Water Sedimentation. Soc. Econ. Paleont. Miner., Short Course, 119-158.

L'INTERVALLO TRIASSICO SUPERIORE GIURASSICO
DELLA SERIE CALCAREO SILICO MARNOSA TRA SAN FELE E L'ALTA VAL D'AGRI,
APPENNINO CAMPANO - LUCANO

Nota di Ennio MARSELLA (*)
presentata dal socio ordinario Bruno D'ARGENIO
Adunanza del 5 dicembre 1987

ABSTRACT

Facies analysis in the Triassic to Jurassic levels of the Lagonegrese sequence have indicated three different facies belts striking N-S and increasing the distal depositional characters from west to east. Extensional tectonics is indicated as the most effective mechanism in order to explain some "anomalous" tectonic contacts with younger on older terrains in the Lagonegro sequence.

RIASSUNTO

L'analisi delle facies delle successioni triassico-giurassiche lagonegresi ha consentito di distinguere tre differenti aree orientate N-S che mostrano condizioni deposizionali con caratteri di distalità più marcati verso est. Meccanismi di tettonica estensionale vengono suggeriti per spiegare alcuni contatti tettonici "anomali" caratterizzati dalla sovrapposizione di terreni più recenti su terreni più antichi.

(*) Dipartimento di Scienze della Terra - Università' di Napoli - Largo San Marcellino, 10 - 80138 Napoli.

INTRODUZIONE

In questa nota vengono proposti parte dei risultati acquisiti durante il rilevamento e l'analisi di facies dei terreni della successione lagonegrese, condotti dall'autore nell'ambito della sua tesi di dottorato, nell'Appennino Campano-Lucano.

In particolare sono stati analizzati i livelli del Triassico sup. costituiti dai "Calcari con selce" e del Giurassico rappresentati dagli "Scisti silicei", tra le località di S.Fele (al nord) e l'alta Val d'Agri (al sud).

L'attenzione è stata concentrata su questo particolare intervallo stratigrafico perché è nei corrispondenti livelli della successione Lagonegrese che sono maggiormente diffusi depositi carbonatici connessi a meccanismi di tipo mass flow, particolarmente interessanti per la comprensione dei processi deposizionali in ambienti marginali di piattaforma carbonatica e di scarpata-bacino, giacché in tali depositi predominano materiali derivanti da aree neritiche.

L'analisi delle facies ha consentito: a) di riconoscere tre differenti gruppi di litofacies, grosso modo organizzate in fasce parallele e allungate in direzione appenninica (fig.1); b) di riconoscere una provenienza dei risedimenti da un'area sorgente allungata e rispetto ai terreni lagonegresi, posta ad ovest.

L'analisi dei rapporti geometrici tra le diverse formazioni e l'esame dei log di alcuni pozzi per ricerca di idrocarburi non ha infine permesso di riconoscere, limitatamente all'area studiata, una chiara evidenza di raddoppi tettonici a scala regionale nelle successioni lagonegresi, come ritenuto dai precedenti autori (SCANDONE, 1967, 1972; D'ARGENIO et al., 1973).

ANALISI DELLE FACIES

Le caratteristiche sedimentologiche di una prima fascia che si estende da San Fele a Vietri di Potenza possono essere esemplificate dalle situazioni di San Fele-Costa del Gaudio. Significato analogo hanno gli affioramenti più meridionali tra Vietri di Potenza ed i Monti della Maddalena che sono più ampiamente trattati in altri lavori (MARSELLA, 1987; MARSELLA e PAPPONE, 1987).

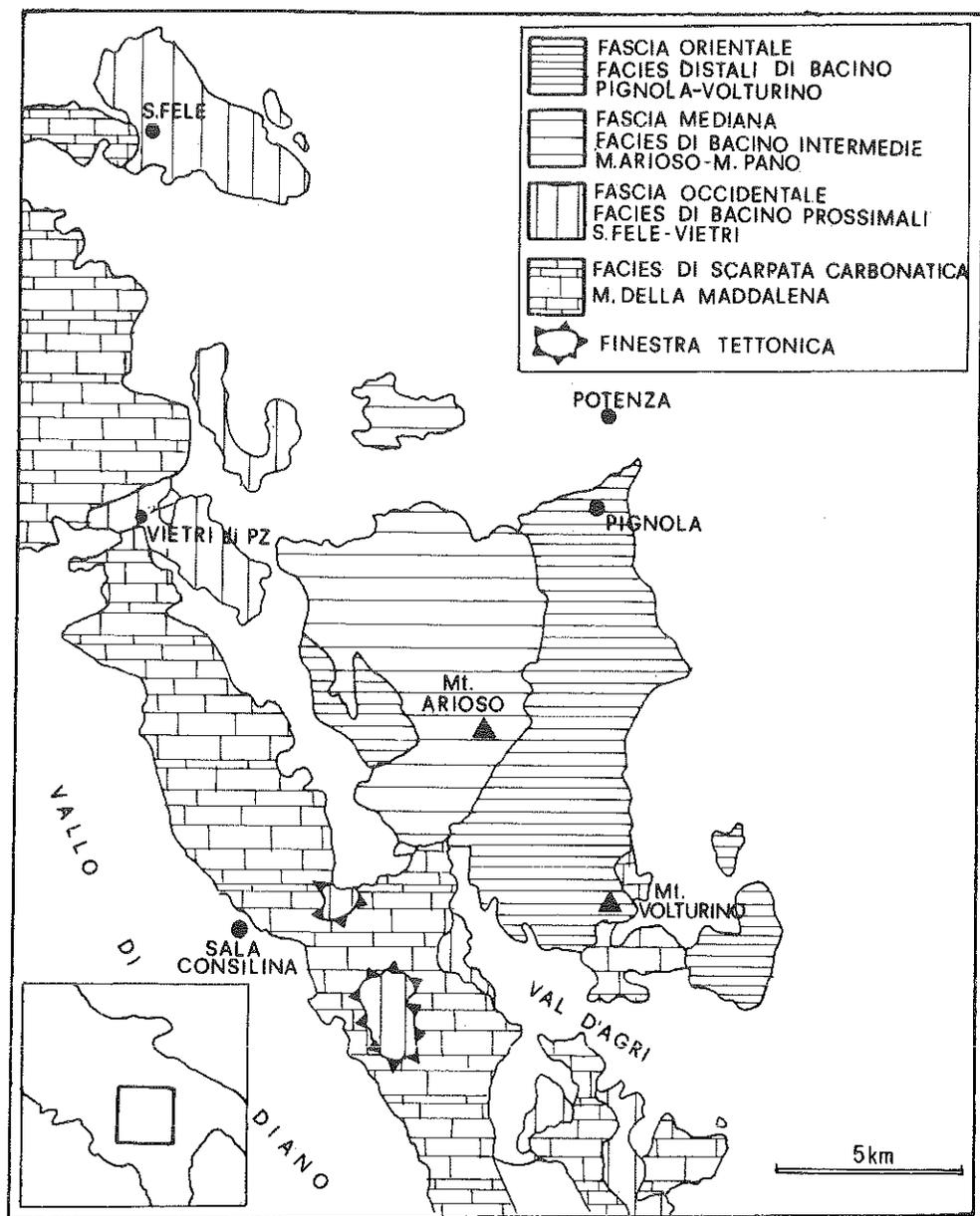


Fig. 1 - Distribuzione dei principali domini di facies nei terreni iagonegresi.-.

I livelli calcareo dolomitici alla base della successione degli "Scisti silicei" della Ralla, presso S.Fele (SCARSELLA, 1957; SELLI, 1962; SCANDONE, 1967; MICONNET, 1983; MARSELLA, 1987) sono costituiti da packstone-wackestone e da grainstone-rudstone (breccie) a bioclasti e a litoclasti provenienti da ambienti di sedimentazioni differenti. L'età dei litoclasti varia dal Trias sup. al Giurassico medio. E' abbondante la presenza di litoclasti carbonatici di origine neritica. La struttura sedimentaria più diffusa è la gradazione inversa. Da un punto di vista tessiturale è da notare l'estrema eterogeneità di forma e di dimensione degli elementi delle "breccie", come pure l'estrema variabilità della matrice.

I bioclasti sono costituiti da: dasicladacee, Lituolitidi, Valvulinidi, Textularidi, foraminiferi bentonici, articoli di crinoidi, frammenti di echinidi. Sono stati riconosciuti anche floatstone-rudstone con le medesime caratteristiche. Stesse tessiture ed associazioni faunistiche mostrano i livelli corrispondenti delle successioni affioranti a Serra dei Venti, Costa Squadro, mentre al Monte Pierno-Serra Marrucca sono osservabili slumping in livelli dolomitici sottilmente stratificati e frammenti di calcari ad Ellipsactiniaee nelle brecciole gradate.

I livelli dolarenitici e doloruditici della successione Lagonegrese prima citata mostrano marcate analogie di facies con livelli della successione carbonatica affiorante nei rilievi di Costa del Gaudio, Il Monticello, Toppo Aquilone a sud-ovest di S.Fele. Tale successione è costituita da un primo centinaio di metri di calcari dolomitici con Megalodontidi, intercalati ritmicamente a livelli di dolomie stromatolitiche e loferitiche (D'ARGENIO e VALLARIO, 1967; CARANNANTE, 1971), a cui fanno seguito 200 metri circa di wackestone-packstone e floatstone-rudstone a bioclasti e litoclasti carbonatici di diversa forma e dimensione, riferibili a diversi ambienti di sedimentazione, con: cianofeece (di tipo Cayeuxia), dasicladacee, Thaumatoporella sp., Bacinella irregularis?, Aulotortus sinuosus?, Miliolidi, Textularidi, Valvulinidi, coralli, gusci di gasteropodi, lamellibranchi, ostracodi, frammenti di echinodermi. Verso la parte alta di tale successione si rinvencono anche: Salpingoporella sp., Trocolina alpina, Labyrinthina mirabilis e foraminiferi planctonici (forme terziarie).

Chiudono la serie un paio di decine di metri di strati dello spessore di 30-40 cm costituiti da calcareniti a Nummuliti, Lepidocycline ed Eterostegine.

Una seconda fascia comprende gli affioramenti del M. Pano, M. Arioso, M. Pierfaone, M. dell'Arena. In questa area affiorano estesamente terreni del Triassico-sup. della formazione di Monte Facito (SCANDONE, 1967), e in misura minore terreni del Triassico-sup.-Giurassico ascrivibili alle formazioni dei "Calcari con selce" e degli "Scisti silicei". Nei depositi appartenenti a queste due ultime formazioni l'analisi delle facies ha consentito il riconoscimento di abbondanti wackestone-packstone e rudstone-floatstone nella formazione dei "Calcari con selce" e di packstone-grainstone nei litotipi appartenenti alla formazione degli "Scisti silicei". Nei "Calcari con selce" si sono anche potuti osservare grainstone-rudstone con selce in frammenti angolari, dispersi in una matrice dolomitica giallastra molto caratteristica. Sono frequenti, inoltre, in questa area, numerosi intervalli con slumping e slump-breccia.

L'analisi di questo tipo di tessiture ha consentito di riconoscere un progressivo decremento delle deformazioni sinsedimentarie di questi depositi procedendo verso est (MARSELLA, 1987). E' infatti possibile osservare in numerosi livelli/liste di selce fortemente deformati da fenomeni di "gliding" o "slumping" che, con l'incremento della deformazione, perdono progressivamente la loro individualità, disperdendosi come frammenti nella matrice. Esempi notevoli di tali tessiture possono osservarsi in località Pezza la Quagliara a NE di Sasso di Castalda e lungo la strada di località Fossa Cupa.

Al Monte Pierfaone, lungo la strada che conduce al ripetitore RAI, dopo circa 30 m di argilliti e marne argillose con calcareniti e breccie calcaree della formazione di M. Facito (Trias medio), seguono i "Calcari con selce" costituiti da 40 m di calcareniti e calciruditi dolomitizzate, con tessiture tipo pebbly-mudstone.

L'aspetto generale é massivo, non vi si distinguono più evidenze di stratificazione e gli spessori sembrano ridursi lateralmente.

Negli "Scisti silicei" le intercalazioni di brecciole calcareo-dolomitiche sono meno diffuse e comunque i livelli presenti hanno uno spessore minore rispetto a quelli delle aree considerate più prossime (SCANDONE, 1967; MARSELLA, 1987).

Una terza fascia è quella che comprende la dorsale di Pignola-Abriola e Serra di Calvello-M. Volturino. In questa area di affioramento la formazione dei "Calcari con selce" é quasi esclusivamente costituita da una monotona sequenza di packstone-wackestone con liste e noduli di selce con

più rare intercalazioni di grainstone-rudstone in strati sottili. Nella matrice di questi calcari si rinvencono, talvolta, abbondanti resti di gusci di "lamellibranchi pelagici".

I fenomeni di "gliding" o "slumping" hanno, in questi affioramenti, scarsa rilevanza. Lo spessore della formazione dei Calcari con selce é stato stimato in circa 400-500 metri per la sezione di Pignola-Abriola (RICCHETTI, 1961; MICONNET, 1983; MARSELLA, 1987) ed in 300-400 metri per quella del Monte Volturino (SCANDONE, 1967, 1972; MARSELLA, 1987).

Nella formazione degli "Scisti silicei" le intercalazioni di breccie calcareo dolomitiche (indicanti apporti di risedimenti da aree di piattaforma carbonatica) sono molto più rare rispetto alle aree di affioramento prima considerate; l'analisi degli elementi di tali breccie ha indicato un "sorting" migliore e una provenienza da litofacies simili. Complessivamente le caratteristiche sedimentologiche dei litotipi esaminati mostrano, in questa area, caratteri di distalità più marcati (MARSELLA, 1987).

PROBLEMI DI TETTONICA

Una delle difficoltà maggiori nel rilevamento dei terreni in esame é rappresentata dalle deformazioni causate dalla tettonica neogenica. Inoltre la ricostruzione palinspastica non può prescindere dalla analisi delle geometrie dei vari corpi rocciosi e dei loro rapporti tettonici. Tali operazioni risultano spesso complesse per le oggettive difficoltà di distinguere sul terreno limiti formazionali in litologie estremamente simili e talora fortemente cataclastiche.

Come é noto dalla letteratura, SCANDONE (1967, 1972) riconosce un raddoppiamento della serie calcareo-silico-marnosa, con una "Unità Lagonegro II" sovrascorsa su una "Unità Lagonegro I". L'entità della traslazione non sarebbe inferiore a 40 Km circa. Un generale sovrascorrimento dei massici carbonatici sull'Unità "Lagonegro II" non sarebbe, secondo tale Autore inferiore a 15-20 Km. Le strutture più diffuse sono costituite da anticlinali ad asse NO-SE nel settore settentrionale e N-S e in quello meridionale dell'area studiata. Alcune strutture sono poi ripiegate a formare sinclinali ad asse E-O. Numerose faglie dirette dissezionano poi le strutture in senso appenninico e antiappenninico.

Nella zona di M. Pierno-Serra Marrucca, in località Orti di Pierno, si

possono osservare interessanti giaciture probabilmente legate a fenomeni di back-thrust. Dolomie calcaree stratificate appartenenti alla parte bassa della successione descritta alla Ralla (San Fele) si trovano al di sopra dei terreni "plastici" costituiti dalla parte alta del "Flysch Galestrino-Flysch Rosso" (Giurassico sup.- Terziario inf.).

Un altro fenomeno, probabilmente connesso a retrovergenza, è quello riscontrato al M. S. Enoc, a nord di Viggiano dove è possibile osservare la formazione degli "Scisti silicei" che giace al di sopra del Flysch Galestrino per faglia inversa immergente ad est.

Si può quindi ipotizzare che tale tipo di deformazione sia tipico del fronte più orientale dei terreni lagonegresi deformati non essendo state riscontrate evidenze del genere in altre aree di affioramento (MARSELLA, 1987).

Al M. Torrette, a SE del M. Volturino, dove SCANDONE (1967, 1972) riconosce il sovrascorrimento della "Unità Lagonegro II" (formazioni di Monte Facito e "Calcari con selce" di M. Torrette) sulla "Unità Lagonegro I" ("Calcari con selce", "Scisti silicei" e "Flysch Galestrino" del M. Volturino), affiorano "Calcari con selce" a cui fanno seguito "Scisti silicei" cataclastici, tettonicamente sottoposti alla struttura di Scarrone di Mezzo costituita da terreni carbonatici attribuibili all'Unità dei Monti della Maddalena. Dal rilevamento si è osservata una sostanziale continuità di struttura tra il M. Torrette ed il M. Volturino. La natura di questo contatto è stata fino ad ora considerata in un regime tettonico puramente compressivo. In realtà l'elisione tettonica di gran parte della successione lagonegrese nei suoi intervalli superiori ("Flysch Galestrino" e "Flysch Rosso"), mette a diretto contatto terreni carbonatici cretacici, ascrivibili all'Unità dei Monti della Maddalena (D'ARGENIO et al., 1973), con quelli triassico-giurassici della successione lagonegrese. Tale condizione (terreni più recenti su terreni più antichi), unitamente allo stato fortemente cataclastico dei litotipi esaminati indicante deformazioni fragili in condizioni di bassa pressione confinante, induce a considerare una tettonica estensionale a faglie dirette a basso angolo (sensu WERNICKE e BURCHFIELD 1982) come la più plausibile per l'interpretazione della natura di questo tipo di contatti. Recentemente D'ARGENIO et al. (1987) hanno utilizzato questo tipo di interpretazione per spiegare analoghi rapporti tettonici nei Monti Picentini.

Un'altro dato interessante appare l'analisi del log del pozzo Pignola 1, situato un paio di chilometri a NNE di Sasso di Castalda. Il pozzo, il

cui piano campagna é a quota 1075 m, ha incontrato fino ad una profondità di 1169 m terreni ascrivibili alla formazione mediotriassica di M. Facito.

Le pendenze degli strati rilevate ad una profondità di 708 m sono di circa 10 gradi. Una tale situazione vincola la geometria del contatto tra i terreni del Flysch Galestrino e quelli della formazione di Monte Facito ad un fascio di piani con giaciture da sub verticali a piani con immersione verso OSO.

Anche in questo caso, risultano evidenti giaciture in cui terreni più recenti ("Flysch Galestrino" del Cretacico inf.) sono tettonicamente sovrapposti a terreni più antichi (formazione di Monte Facito del Triassico med.) (fig.2).

DISCUSSIONE

Negli ultimi anni si sono registrati notevoli progressi delle conoscenze sulle aree di scarpata che raccordano le piattaforme carbonatiche ai bacini adiacenti. In particolare nell'area Florida-Bahamas, grazie alla diffusione di moderne tecnologie (profili sismici, batiscafi, carotaggi), si sono individuate le modalità con cui i sedimenti carbonatici, prodotti dalle piattaforme, si risedimentano nei bacini, modalità che appaiono peculiari di questi sistemi deposizionali (piattaforma carbonatica-scarpata-bacino) e non riconducibili ad altri ambienti dei margini continentali (ambienti silico-clastici, modello di ridistribuzione dei sedimenti tipo fan; NORMARK, 1970; MUTTI e RICCI LUCCHI, 1972; WALKER e MUTTI, 1973).

La ridistribuzione dei sedimenti sulle scarpate carbonatiche, largamente dovuta a fenomeni tipo mass flow, legata più che a poche sorgenti puntiformi di risedimenti a linee continue di approvvigionamento, causa una distribuzione di facies parallele, secondo uno stile "ad apron" (MULLINS et al., 1984). Recentemente tale schema é stato applicato anche al Mesozoico superiore dell'Appennino Centrale (COLACICCHI e BALDANZA, 1986). Si ritiene che la chiave interpretativa offerta da questa modellistica applicata al contesto geologico dell'area studiata trovi qui applicazione e conferma.

Le caratteristiche tessiturali e di associazioni fossilifere (con la presenza contemporanea di fossili di eta' differente) della prima fascia, sia per la successione silico-carbonatica (San Fele-Vietri di Potenza) che per quella carbonatica (Costa del Gaudio-Monti della Maddalena), mettono

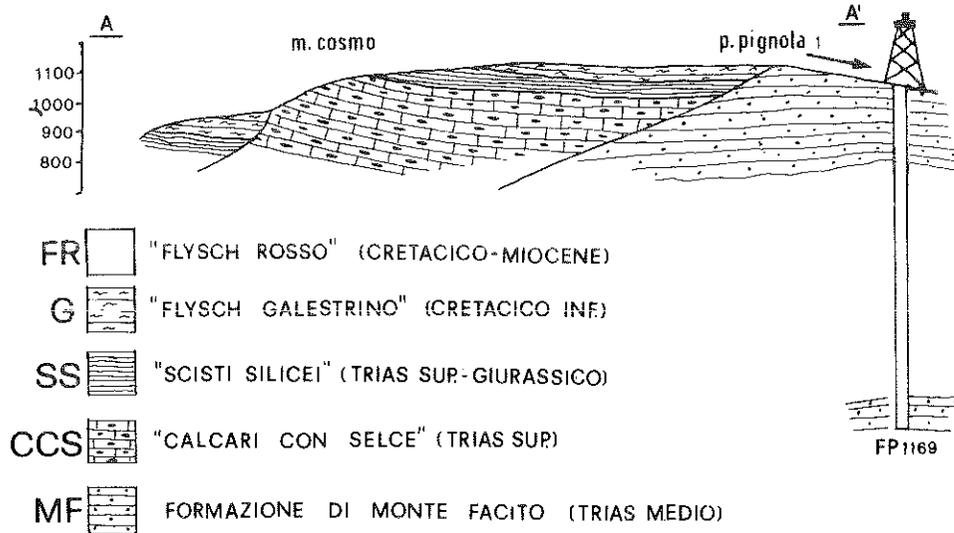
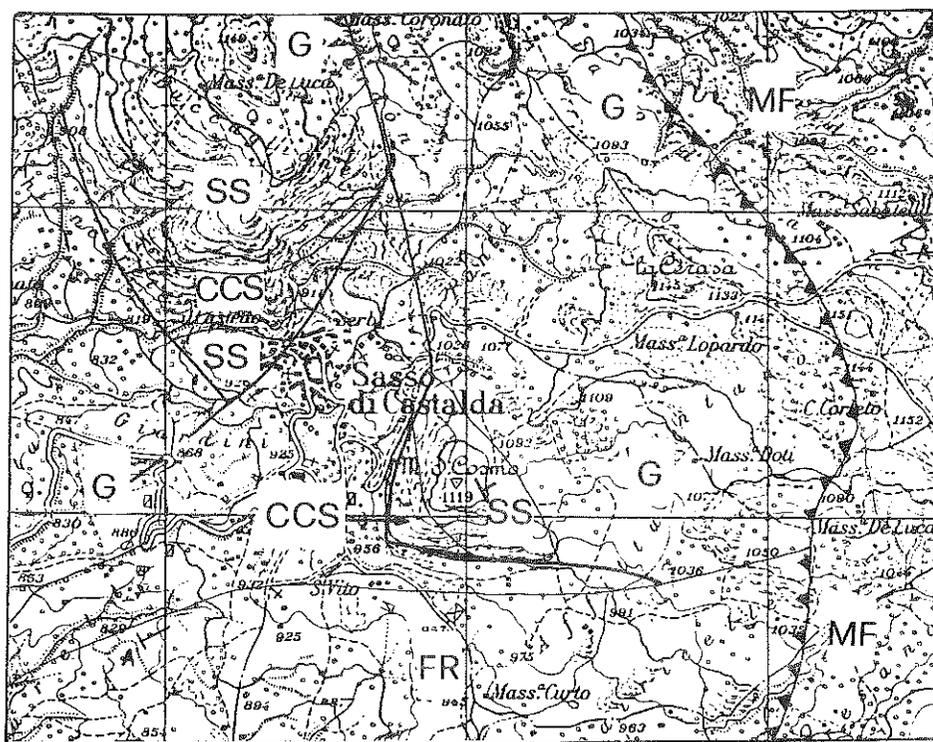


Fig. 2 - Carta e sezione geologica schematica dell'area di Sasso di Castalda. F. n° 199 III NE (scala 1 : 25000).

fortemente in risalto l'origine da "risedimentazione" di tali depositi, tipica delle aree di raccordo tra piattaforma carbonatica e bacino e lasciano presupporre che debbano essere stati presenti, ad ovest, diffusi ambienti carbonatici di acqua bassa, tributari di sedimenti al bacino. Le caratteristiche sedimentologiche degli altri depositi esaminati evidenziano che il loro afflusso nel bacino é registrato in modo sempre meno marcato nelle altre due fasce esaminate, procedendo da ovest verso est.

Tale "tendenza", unitamente alla distribuzione areale dei gruppi di facies descritti in fasce parallele, suggerisce un diverso modello di distribuzione dei sedimenti carbonatici nel Bacino Lagonegrese.

Per quanto riguarda l'assetto strutturale dei terreni lagonegresi, dai dati riassuntivamente esposti, si ritiene che, piuttosto di un ricoprimento a scala regionale dell'Unità "Lagonegro II" sull'Unità "Lagonegro I", sia plausibile considerare "raddoppi" locali nel quadro di un più generale stile ad embrici per la deformazione compressiva miocenica dei terreni lagonegresi. In seguito, nel Pliocene, una o più fasi di tettonica estensionale, esplicate prevalentemente con faglie dirette a basso angolo, avrebbero profondamente modificato l'assetto strutturale precedentemente raggiunto dalla catena, con la possibilità che alcuni movimenti distensivi si possano essere verificati lungo quelle stesse superfici che precedentemente avevano funzionato come piani di thrust. Un'ulteriore modificazione di tali geometrie (rotazioni, tilting), deve essersi verificata, poi nel Pleistocene, dove le fasi della neotettonica si sono esplicate anche, con faglie dirette ad alto angolo.

LAVORI CITATI

- CARANNANTE G. (1971) - Ricerche sedimentologiche sulla successione ciclotemica dell'Infralias del Passo della Annunziata Lunga. Boll. Soc. Natur. Napoli, 80: 389-412
- COLACICCHI R. e BALDANZA A. (1986) - Carbonate turbidites in a Mesozoic pelagic basin: Scaglia formation, Apennines Comparison with siliciclastic depositional models. Sedimentary geology, 48: 81-105
- D'ARGENIO B., IETTO A., OLDOW J. (1987) - Low angle normal faults in Picentini Mountains, Southern Apennines. Rend. Soc. Geol. It., vol. 2, in stampa.

- D'ARGENIO B., PESCATORE T., SCANDONE P. (1973) - Schema geologico dell'Appennino meridionale (Campania e Lucania). Atti del Convegno: Moderne vedute sulla geologia dell'Appennino. Acc. Naz. Lincei, Quad. 183, 49-72.
- D'ARGENIO B., VALLARIO A. (1967) - Sedimentazione ritmica nell'Infralias dell'Italia Meridionale. Boll. Soc. Natur. in Napoli, 76,7.
- MARSELLA E. (1987) - I terreni Lagonegresi tra S.Fele e la Val D'Agri. Evoluzione tettonico-sedimentaria (Trias sup-Giurassico). Tesi di dottorato. Univ. di Napoli.
- MARSELLA E. e PAPPONE G. (1987) - Evidenze di un'area di scarpata mesozoico-terzaria (Monti della Maddalena) nei domini della I Piattaforma Campano-Lucana. Appennino meridionale. in questo volume.
- MICONNET P. (1983) - La region de Lagonegro (Italie meridionale): evolution geologique d'un bassin dans son cadre Alpin. Tesi di Dottorato. Univ. de Lille., 185.
- MULLINS H.T, HEATH K.C., VAN BUREN H.M., NEWTON C.R. (1984) - Anatomy of a modern open ocean carbonate slope: northern Little Bahama Bank. Sedimentology 31, 141-168.
- MUTTI E. e RICCI LUCCHI F. (1972) - Le torbiditi dell'Appennino settentrionale: introduzione all'analisi delle facies. Mem. Soc. Geol. Ital., 11, 161-199
- RICCHETTI G. (1961) - Geologia del nucleo mesozoico di Pignola-Abriola (Potenza). Boll. Soc. Geol. It.,80, 247-267.
- NORMARK W. R. (1970) - Growth patterns of deep-sea fans. Bull. Am. Ass. Pet. Geol., 54, 2170-2195
- SCANDONE P. (1967) - Studi di geologia lucana: la serie calcareo-silico-marnosa e i suoi rapporti con l'Appennino calcareo. Boll. Soc. Natur. in Napoli, 76, 1-175.
- SCANDONE P. (1972) - Studi di geologia lucana: nota illustrativa della carta dei terreni della serie calcareo-silico-marnosa. Boll. Soc. Natur. in Napoli, 81, 225-300.
- SCARSELLA F. (1957) - Sulla posizione stratigrafica degli scisti silicei attribuiti al Trias medio dell'Appennino meridionale. Boll. Soc. Geol. It., 76, 3, 53-59.
- SCHLAGER W.e GINSBURG R. (1981) - Bahama carbonate platforms. The deep and the past. Marine Geology, 44, 1-24
- SELLI R. (1962) - Il Paleogene nel quadro della geologia dell'Italia centro-meridionale. Mem. Soc. Geol. It., 3, 737-789.

- WALKER R.G., MUTTI E. (1973) - Turbidite facies and facies association. In G.V. Middleton and A.H. Bouma (Editori), Turbidites and Deep-Water Sedimentation. Soc. Econ. Paleont. Miner. Pac. Sect., Short Course, 119-158.
- WERNICKE B. e BURCHFIELD B. C. (1982) - Modes of extensional tectonics. Journal of Structural Geology, 2, 105-115

CONTRIBUTO ALLA CONOSCENZA DELL'ATTIVITA' STORICA DEL VESUVIO:
LA STRATIGRAFIA DI VILLA INGLESE (TORRE DEL GRECO).

Nota di ROLANDI G. *-RUSSO F.**

presentata dal socio ordinario

Bruno D'Argenio

Adunanza del 5.12.1987

RIASSUNTO

Viene studiata la geologia della località Villa Inglese di Torre del Greco attraverso le strette relazioni esistenti tra i livelli che costituiscono la locale successione Vulcanica e le strutture di epoca storica (XVI e XVIII sec.) utilizzate come termini "antequem" e "postquem".

Da questo studio è scaturito un inquadramento cronostatigrafico dell'attività del Vesuvio in epoca storica, relativamente a quei prodotti presenti in questa parte del settore meridionale dell'apparato.

In particolare, è stato possibile riconoscere e datare le lave e le piroclastiti dell'attività medioevale (472-1631) differenziandole da quelle dell'attività storica recente (1631-1760). Tra queste ultime vengono individuate e descritte dettagliatamente lave del 1631, da altri ritenute inesistenti o attribuite a diverse età, e vengono precisati i rapporti con le lave del 1760.

* Dipartimento di Geofisica e Vulcanologia dell'Università di Napoli.

** Dipartimento di Scienze della Terra dell'Università di Napoli. Lavoro eseguito con il contributo del CNR, Gruppo Nazionale di Vulcanologia, contratto n. 8601528.62.

ABSTRACT

The stratigraphy of Vesuvius' historical products near Villa Inglese (Township of Torre del Greco), on the south flank of the volcano, has been revised: a new map of the area and some dating of the volcanics with the ages of historical buildings, are here presented. Medieval (472 to pre-1631) lava and pyroclastic sequences have been distinguished from those of the 1631 and 1760 eruptions.

The 1631 deposits, recently, considered to be only pyroclastic, in nature have been found to consist of lava and probably of pyroclastic units and indicate a more complex evolution for one of the largest eruptions on Vesuvius, since the Pompei event in 79 A. D.

INTRODUZIONE

Nella località Villa Inglese, situata nella frazione Leopardi di Torre del Greco, grazie alla imponente attività estrattiva delle lave vesuviane iniziata già dal secolo scorso è stata messa in evidenza una situazione stratigrafica di notevole interesse per la conoscenza della storia eruttiva del Vesuvio in epoca storica, in special modo per quell'attività poco nota avvenuta tra le eruzioni del 472 e 1631.

In particolare, nella successione stratigrafica rilevata rivestono un preciso significato alcuni livelli su cui sono stati costruiti manufatti nei secoli XVI^{mo} e XVII^{mo}.

Questa favorevole circostanza ha permesso di utilizzare, accanto al criterio litostatigrafico per l'individuazione delle sequenze eruttive nei diversi fronti di scavo, anche il criterio cronostatigrafico, considerando di volta in volta le citate strutture come termini di "antequem" e "postquem".

Sono state consultate inoltre numerose fonti di storia lo

cale, utilissime per la ricchezza di informazioni relative ai periodi in cui si manifestarono le attività vulcaniche nella zona presa in considerazione.

L'insieme di queste informazioni, integrate da uno studio di dettaglio sul terreno, offre un notevole contributo alla conoscenza geologica dell'area investigata, e consente di pervenire ad un inquadramento delle tipologie eruttive che si sono succedute in epoca storica, nell'ambito delle quali, l'attività vulcanica compresa tra il 472 e il 1631 necessitava di ulteriori approfondimenti.

1 - PRECEDENTI LAVORI SUL SETTORE MERIDIONALE VESUVIANO

Nel suo lavoro del 1865 il Le Hon prese in considerazione l'intero settore meridionale del Vesuvio, proponendo una ricostruzione dell'eruzione del 1631 accompagnata da un rilevamento delle lave emesse durante il periodo 1631-1861. La carta geologica elaborata da questo autore, pur riportando alcune inesattezze, deve considerarsi ancora oggi, tenendo conto dell'epoca in cui è stata redatta, un documento di estremo interesse.

Nell'ambito del settore di SE, in particolare, Le Hon segnalò la diffusa presenza delle lave del 1631, praticamente in continuità di affioramento. I fronti di queste lave, erano ubicati lungo la costa tra le località "Le Mortelle", in Torre del Greco e "La Storta" in Torre Annunziata, in progressivo restringimento verso monte.

Al di sopra delle lave del 1631 l'autore pone le lave del 1760, ubicandole grosso modo nella stessa posizione indicata dal De Bottis (1762) che fu testimone oculare di questa eruzione.

Le Hon, avendo preso in considerazione il periodo 1631-1861, non fa cenno alla presenza delle lave più antiche che affiorano nelle cave di Villa Inglese già attive a quel-

l'epoca.

Successivamente Alfano e Friendlander (1929) nella loro carta geologica del Somma-Vesuvio, pur tenendo in scarsa considerazione il lavoro di Le Hon cartografano le citate lave nella medesima posizione.

Più recentemente Burri e Di Girolamo (1975), in occasione di uno studio petrochimico sulle lave del 1631, fanno ampiamente cenno alla loro diffusione descrivendo, tra l'altro, la stratigrafia delle cave di Villa Inglese. La successione che propongono questi autori, rilevata nella cava di maggiore estensione, sul fronte situato a nord, è la seguente, a partire dall'alto:

- lava del 1760 (A)
- formazione piroclastica costituita da blocchi e lapilli in matrice cineritica a tessitura massiccia, caotica, contenente legni carbonizzati (B)
- lava del 1631 (C)
- lava del 1480
- lava del 1139.

L'attribuzione della terza lava della successione appena descritta al 1480, peraltro accettata in forma dubitativa da Burri e Di Girolamo, rappresenta un tentativo di datazione di lave dell'attività storica mediante spettrometria sulla base del disequilibrio Ra^{226} e U^{238} (Luongo e Rapolla 1964, Rapolla e Vittozzi 1968). Con l'identica metodologia fu ricavata la data del 1139 per la 4^a lava.

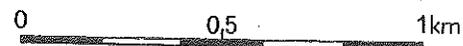
Ancora più recentemente, infine, alcuni ricercatori della Università di Pisa (Rosi e Santacroce, 1968) hanno confutato l'esistenza di lave nell'eruzione del 1631. Questa convinzione ha trovato successivamente riscontro nella carta geologica del Somma-Vesuvio redatta nell'ambito del progetto finalizzato "GEODINAMICA" (Rosi et al. 1986).

2 - INQUADRAMENTO GEOLOGICO-STRATIGRAFICO NELL'AREA DI VILLA
INGLESE

Nell'affrontare questo studio ci siamo posti come obiettivo prioritario l'approfondimento degli stretti legami che intercorrono tra studi stratigrafici sul terreno e dati storici, attraverso il prezioso supporto delle numerose strutture edilizie presenti nella zona che si rivelano efficaci elementi di cronologia assoluta, assumendo la funzione di termini "antequem" e "postquem".

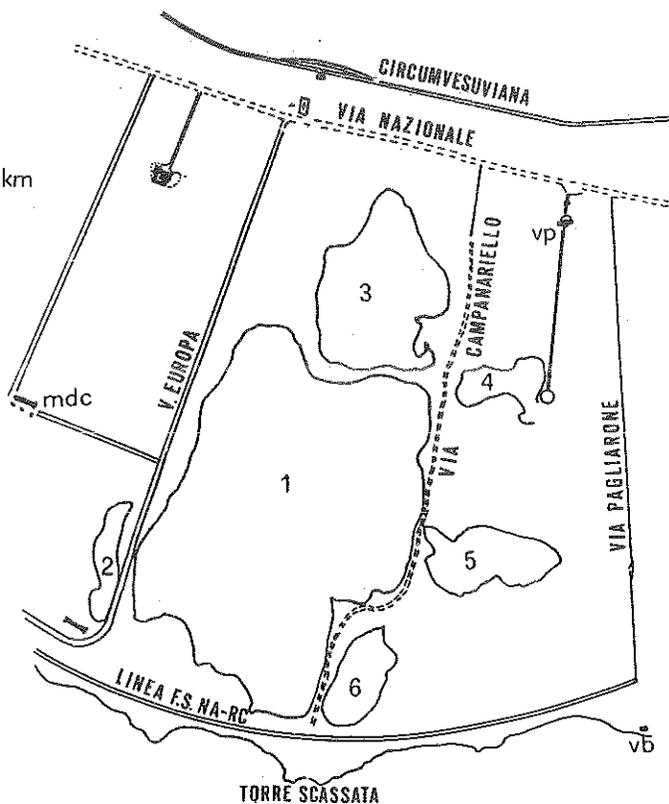
Seguendo tale criterio abbiamo pertanto proceduto all'esame dettagliato delle numerose sezioni naturali ed artificiali (Cave) presenti nell'area in studio, corredando ciascuna situazione stratigrafica di un dettagliato esame delle testimonianze storico-architettoniche presenti nell'area.

FIG. 1 - UBICAZIONE DELLE CAVE
IN LOC. VILLA INGLESE



LEGENDA

- mdc Masseria di Donna Chiara
- vb Villa Balke
- vp Villa Prota



Lo studio stratigrafico, in particolare, è stato

basato sull'esame delle diverse sezioni della località Villa Inglese.

I fronti delle numerose cave presenti nell'area rappresentano altrettante sezioni stratigrafiche, ciascuna delle quali pone in maggiore o minore risalto i singoli elementi della successione, e ciò a causa della articolazione della preesistente morfologia che ha controllato la deposizione dei corpi lavici e piroclastici (Fig. 1).

A partire dalle aree di cava, si è cercato inoltre di estendere le correlazioni all'esterno, nelle porzioni di territorio situate immediatamente ad est e ad ovest delle stesse, pervenendo in tal modo alla ricostruzione completa della successione stratigrafica della località Villa Inglese (Fig. 2).

2.1. CAVE DI VILLA INGLESE (Fig. 1).

CAVA N. 1

Questa cava, essendo da decenni sede di una importante attività estrattiva, è quella che presenta attualmente le maggiori dimensioni. La fig. 2b illustra la successione stratigrafica ricavata correlando le sequenze rilevabili nei diversi fronti di scavo. Si rinvennero, a partire dall'alto, i seguenti termini:

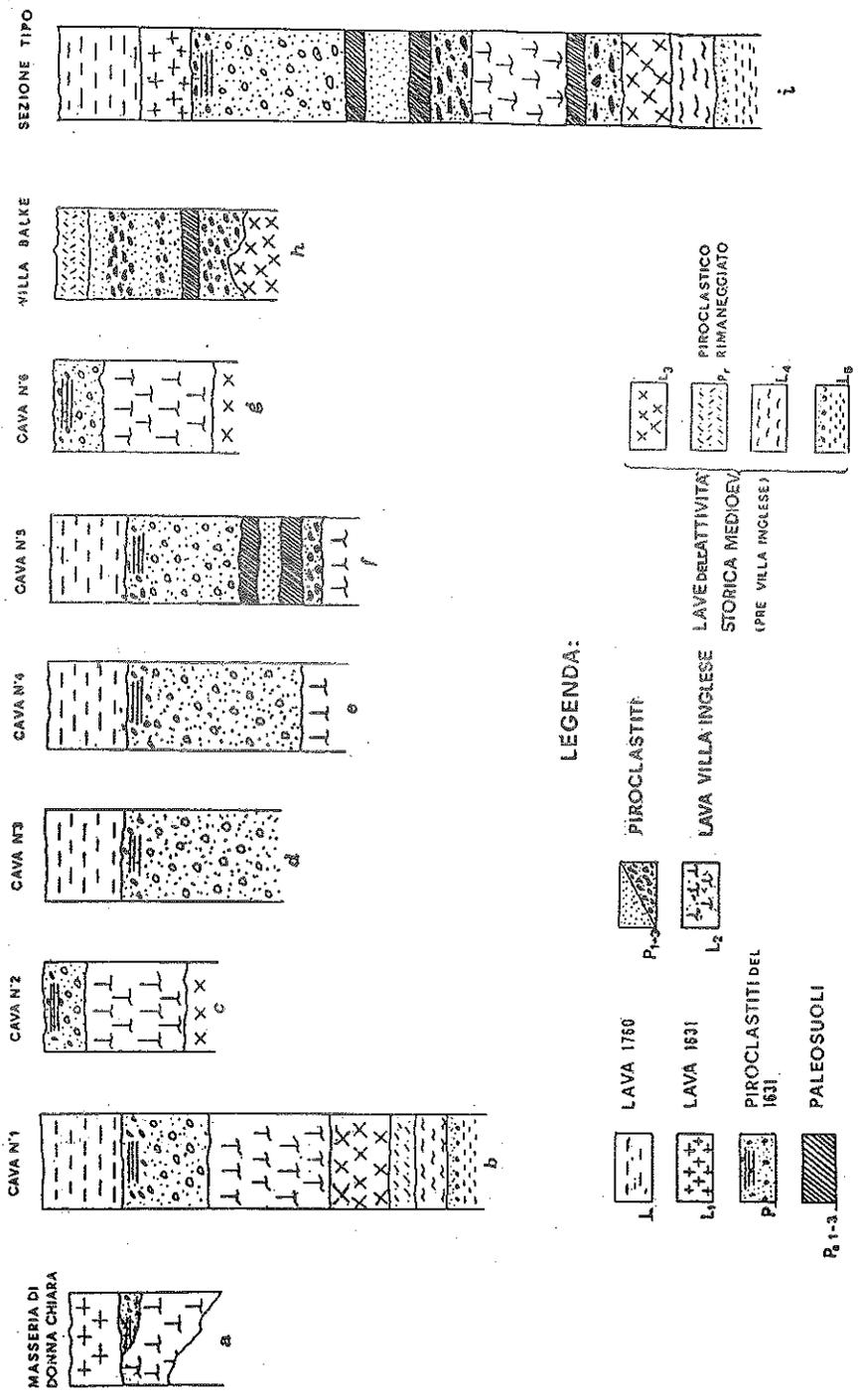
1) lava di colore grigio-chiaro (L)

Si presenta con un corpo centrale, fratturato a grossi blocchi e ricco di pirosseni con presenza subordinata di olivina, il quale è coperto da un carapace scoriaceo dello spessore di circa 1,5 mt. ed ha un livello autobrecciato dello stesso spessore a letto. Complessivamente lo spessore del corpo lavico oscilla sui 3-4 mt.

2) PIROCLASTITI P

Sequenza piroclastica da flusso dello spessore di circa

FIG.2 - SCHEMA STRATIGRAFICO DI
LOC. VILLA INGLESE



m. 2 che si rinviene a letto della lava L costituita da una parte con tessitura massiva alla base e stratoide nella porzione sommitale; a contatto con lava le piroclastiti presentano segni di diffuso arrossamento.

Descriveremo in seguito più compiutamente questi prodotti.

3) LAVA L₂.

Questa lava soggiace ai livelli piroclastici (P), con uno spessore di circa 10 mt.. Si tratta della manifestazione più imponente e di maggior interesse estrattivo (Penta e Del Vecchio 1935).

La parte centrale è interessata da fressurazione colonnare, molto simile a quella di tipo ignimbrico. Tra i caratteri distintivi anche un caratteristico carapace scoriaceo di color giallo ocra e una altrettanto caratteristica patina di ossidazione bianco giallastra; la composizione mineralogica è data da pirosseni, olivina (subord.), plagioclasti, leucite. Tutti questi caratteri ne consentono una facile individuazione in cava.

La lava in questione rappresenta un marker stratigrafico per le successioni presenti nella zona, per essa usiamo il nome dato dai cavatori locali: "lava di Villa Inglese".

4) LAVA L₃.

Il termine immediatamente a letto della "lava di Villa Inglese" è rappresentato da una lava di color grigio plumbeo; i due corpi lavici sono separati nettamente da una superficie ad andamento suborizzontale. Questa lava, il cui spessore è di 5-6 mt., si presenta fratturata secondo un reticolo irregolare in grossi blocchi e presenta alla sommità un ridotto carapace la cui frazione scoriacea è di colore scuro.

5) LAVA L₄.

Verso il basso si rinviene ancora una lava, separata a

tetto dalla precedente, da circa m. 2 di piroclastici sciolte in giacitura secondaria. Essa presenta, nel complesso, un esiguo spessore (2 mt.) nell'ambito del quale risulta consistente la parte basale autobrecciata ed il carapace scoriaceo sommitale.

6) LAVA L₅.

Alla base della precedente si individua ancora una lava che in questa cava affiora per qualche metro, rappresentando l'attuale piano basale della cava. La porzione in affioramento è ovviamente quella sommitale del carapace scoriaceo notevolmente arrossato che verso l'alto, a contatto con la lava a tetto, sfuma in sottile livello cineritico, notevolmente arrossato, forse indizio della presenza di un paleosuolo successivamente cotto dalla lava.

CAVA N. 5.

La cava n. 5 presentando una situazione più completa relativamente ai termini piroclastici interposti tra le lave L e L₂ (Fig. 2f), viene descritta in dettaglio.

Si rinvencono a partire dall'alto i seguenti termini:

1) Lava di colore grigio chiaro (L). E' la stessa lava che costituisce il termine sommitale delle cave precedentemente descritte.

2) Livelli piroclastici (P). Anche questi prodotti sono gli stessi già individuati nelle precedente sezione stratigrafica. In questa cava, tuttavia, la migliore esposizione ne ha consentito una più esauriente descrizione:

2.1) Si tratta di una sequenza piroclastica costituita nella sua parte sommitale da un'alternanza di strati a tessitura grossolana e fine, a luoghi stratificati. Gli

strati con tessitura grossolana, (spessore 0,8-1 mt.) si presentano massivi, con matrice sabbiosa fine che ingloba grossi frammenti lavici di dimensioni decimetriche.

Si rinvencono elementi litici embriciati (tipo Pebble Clusters).

Gli strati più sabbiosi presentano una tessitura a stratificazione pianoparallela o incrociata a basso angolo. La sequenza termina verso l'alto, con un livello cineritico marcatamente più arrossato.

2.2) Questa successione si completa a letto nella zona più depressa, con un deposito a tessitura massiva da Pyroclastic flow con clasti di lave, calcari metamorfosati, cumuliti ecc. (\emptyset max 10 cm.) che risultano inglobati e dispersi nella matrice sabbiosa (tessitura tipo MATRIX SUPPORTED). Verso l'alto la matrice è prevalente e gli elementi litici si riducono di dimensioni (\emptyset max 1-2 cm.).

3) Alternanza di paleosuoli (Pa) e piroclastiti (P_1). Questi prodotti, non ben individuati nelle successioni precedenti, si rinvencono distintamente a letto dei prodotti appena descritti. Si distinguono in particolare un sottile livello cinerico di colore violaceo (P_1) racchiuso entro un paleosuolo a tetto (Pa_1) ed uno a letto (Pa_2).

4) Piroclastiti scoriacee scure (P_2) e lava L_2). Si tratta della "lava di Villa Inglese" che in questa cava affiora con uno spessore ridotto (2 mt.) e presenta a tetto un livello scoriaceo scuro (P_2), probabilmente derivanti dalla componente esplosiva stromboliana subpliniana della stessa eruzione che ha origine il flusso lavico L_2 .

L'approfondimento di questa cava non è tale da mettere in evidenza le altre lave del substrato precedentemente descritte.

ALTRE CAVE:

La successione descritta per le due precedenti cave è la

più completa; nelle altre cave si rinvencono solo alcuni termini, sommitali, o basali.

In particolare, nella cava n. 2 si può osservare la presenza della "lava di Villa Inglese" con una modesta copertura (qualche metro) a tetto di piroclastiti P. (Fig. 2c). Nella cava n. 3 affiora solo la lava L con alla base uno spessore più consistente di piroclastiti P (Fig. 2d). Identica situazione presenta la cava n. 4 (Fig. 2e). La cava n. 6, con il suo fronte meridionale a ridosso della linea ferroviaria, presenta ancora una successione più ridotta, relativa al termine lavico (L_2) ed a qualche metro di piroclastiti a tetto (Fig. 2g).

In quest'ultima cava, alla base della "lava di Villa Inglese" è presente la falda, da cui il nome "piede nell'acqua" utilizzato localmente.

L'esame dettagliato eseguito nelle diverse cave ci consente di comprendere come la configurazione articolata della morfologia preesistente abbia condizionato la deposizione dei corpi lavici e piroclastici. Così ad es. analizzando in successione le cave n. 1 e 5, ci si rende conto che le lave più antiche che affiorano nella cava n. 1 (L_3 , L_4 , L_5) scompaiono verso SE per cui in questa direzione, in corrispondenza della cava n. 5 la "lava Villa Inglese" (L_2) con il suo spessore rilevante, diventa il corpo lavico più rappresentativo che si spinge fino a mare e su cui si erge la struttura della Torre Scassata.

Si osserva inoltre che le piroclastiti P presentano il loro massimo spessore nelle cave n. 3, 4, 5, e che diventano via via più esigui nelle cave 1, 2, 6. Questa osservazione concorda con una deposizione di flussi piroclastici canalizzati in direzione NW-SE (direzione delle cave 3-4-5) che si chiudono a "becco di flauto" lateralmente (direzione delle cave 1, 2 e 6).

2.2 ZONE ESTERNE ALLE AREE DI CAVA

- ZONA AD OVEST (MASSERIA DI DONNA CHIARA)

Verso Ovest, al di fuori delle aree di cava contrassegnate con i numeri 1 e 3 in fig. 1, si rinviene una costruzione denominata "VILLA GURGO" o MASSERIA DI DONNA CHIARA, la cui età di costruzione risale al 1698 (App. 2). Tale costruzione poggia con le sue fondazioni su di una lava L_1 che in questo posto si sovrappone alla "lava Villa Inglese" (fig. 2a), la quale, a sua volta, si estende in questa direzione diminuendo di spessore.

In pratica, la lava su cui poggia le sue fondazioni la Villa Gurgo non si rinviene nell'ambito dei fronti delle cave di Villa Inglese. La fig. 2a mostra la posizione stratigrafica di questa lava rispetto ai prodotti che costituiscono le successioni nelle cave.

-ZONA A SE (VILLA BALKE).

Poco più a est del tratto costiero che sottende l'area dove sono ubicate le cave di Villa Inglese, affiora una successione di prodotti lavici e piroclastici (fig. 2h); si riconoscono a partire dall'alto i seguenti termini:

1) LIVELLI PIROCLASTICI

Al di sotto di un livello costituito da sabbia vulcanica di colore violaceo si rinviene un primo livello stromboliano costituito da scorie scure di grosse dimensioni (\emptyset max 2 cm), e quindi ancora nell'ordine: sottile livello di sabbie scure di piroclastiti scure di tipo stromboliano, e sabbie scure. Tra il livello piroclastico sommitale e le alternanze sabbie-piroclastiti a letto è mal distinguibile la presenza di un livello humificato, livello che si distingue chiaramente invece alla base della successione e che separa quest'ultima da un'altro consistente livello di piroclastiti stromboliane.

2) LAVA GRIGIO SCURA:

Si tratta di una lava ricchissima di minerali femici (pirosseni, olivina) depositatasi in questa località su di una morfologia, alquanto articolata. Il corpo lavico presenta una parte centrale, con spessore di 3 m. fratturata, le cui fratture irregolari si riuniscono e si anastomizzano isolando dei diedri di lava.

La parte basale si presenta con uno spessore di circa 2 mt. a vista, autobrecciata, mentre la parte sommitale, per circa 1,5 mt. presenta una crosta scoriacea scura.

Poco oltre la stessa lava situata in una zona più depressa, si presenta fragmentata a blocchi secondo fratture colonnari o tozze, con alla base numerose forme di tipo pillow, dovute alla messa in posto in acqua della colata lavica.

La lava presente alla base di questa successione si segue fino alla località Torre Scassata e qui si osserva che essa soggiace alla "lava di Villa Inglese". Detta lava quindi corrisponde al termine L_3 individuato nelle cave, al quale peraltro lo riconducono anche i caratteri mineralogici e tessiturali.

Correlando tra loro le sezioni rilevate nelle diverse località di Villa Inglese (Figg. 2a-H) è possibile rappresentare la successione stratigrafica generale di questa zona (fig. 2i).

Nella fig. 3 viene proposto uno schema geologico dei prodotti.

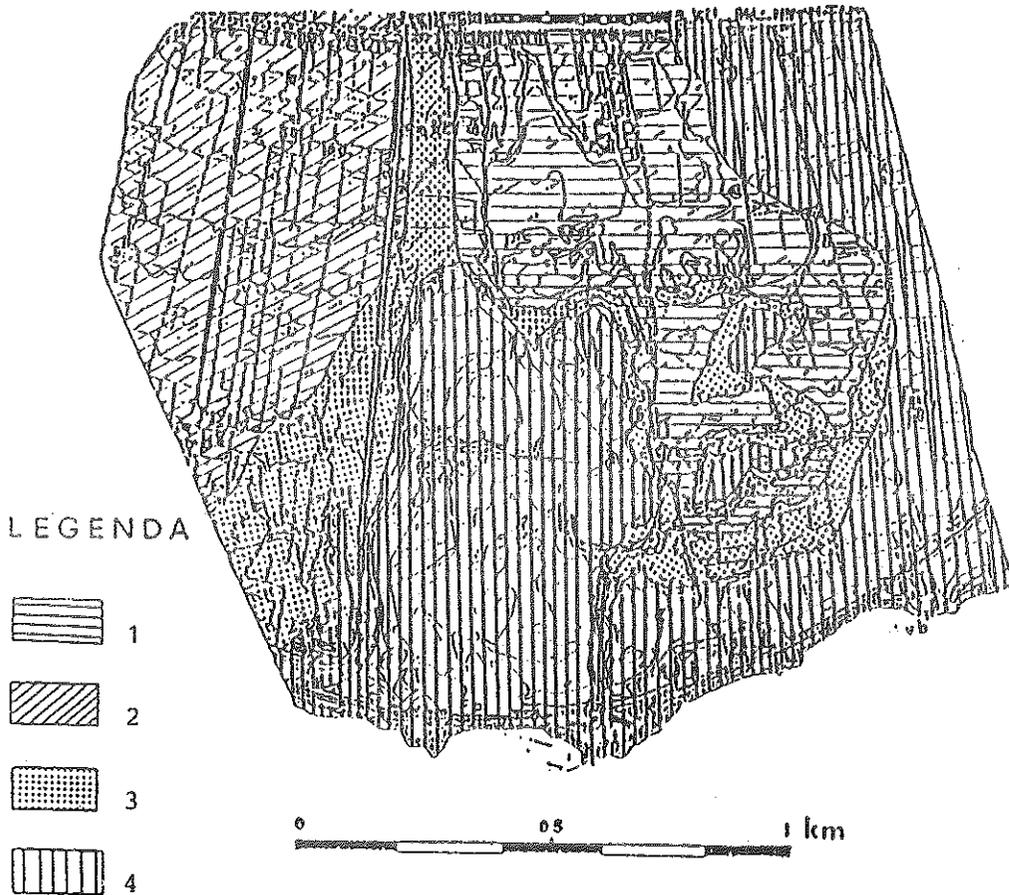


Fig. 3 - Carta geologica della località Villa Inglese. 1) Lave del 1760; 2) Lave del 1631; 3) Piroclastiti da flusso del 1631; 4) Lave dell'attività effusiva medioevale (472 - 1631).

3) INQUADRAMENTO CRONOLÓGICO DELLE SUCCESSIONI STRATIGRAFICHE

Osserviamo a questo punto come sia possibile ottenere un inquadramento cronologico di alcuni importanti termini appartenenti alla successione di Villa Inglese.

Il corpo lavico di maggiori proporzioni che abbiamo denominato "lava di Villa Inglese" si estende verso il mare ed in prossimità della costa, al di sopra di esso, si erge una torre di avvistamento costiero, la cui età di costruzione viene fatta risalire al 1563 (App. 1).

Questa osservazione si rivela di estrema importanza dal momento che tale membro lavico era stato, come già abbiamo rilevato, assimilato a quello del 1631 (Burri e Di Girolamo 1975).

Al di fuori dell'area in studio, considerazioni analoghe portano ad escludere che la lava su cui poggia la Torre di Bassano (circa 3 km a ovest della località Villa Inglese), appartenga alla eruzione del 1631 (Rolandi e Russo 1987). Queste osservazioni, comunque, costituiranno parte integrante di successivi lavori riguardanti la geologia di tutto il margine meridionale vesuviano.

Si tratta ora di stabilire a quale periodo effusivo, successivo al 1563, appartengono i prodotti presenti a tetto della "lava Villa Inglese".

Per quanto riguarda la lava soggiacente alla MASSERIA DI DONNA CHIARA (lava 1 di fig. 2a), essa risulta più recente di questa costruzione, la quale risale al 1698 (App. 2); con ogni probabilità la lava in questione appartiene all'eruzione del 1631.

Non si può ascrivere infatti questa lava all'attività compresa tra il 1631 e il 1698 (eruzione del 1660-1694), perchè le lave di questo periodo, di esigue dimensioni, non hanno interessato il settore da noi preso in considerazione.

Né d'altro canto è sostenibile l'ipotesi che possa essere

di epoca medievale in quanto le testimonianze storiche (App. 2) ci confermano che questa località era "arbustatam et incul-tam causa incendii Vesuvi montis de anno 1631)" (Loffredo S. 1983).

Per quel che concerne le piroclastiti P che in fig. 2i si rinven-gono a letto della lava L_1 è da osservare che in alcuni recenti lavori (Rosi e Santacroce 1986) esse sono state attribuite all'eruzione del 1631; gli stessi autori confutano l'esistenza di lave per questa eruzione (Rosi et al. 1986).

Non abbiamo, al momento altri elementi che confermino la presenza dei flussi piroclastici, all'infuori dei documenti storici, dai quali si avrebbe comunque una prova in tal senso. Riportiamo in App. 3 la parte finale del lavoro del Braccini (1632) dal quale si desume chiaramente che egli de-scrive alcuni tipi di "Torrenti" con le caratteristiche dei flussi piroclastici. Tuttavia lo stesso autore distingue un altro tipo di "torrenti" nel descrivere i quali si fà esplicitamente riferimento alle lave del 1631, per cui in ultima analisi la successione lave L_1 e piroclastiti P presenti nel settore di SE del Vesuvio appaiono come due membri della stessa formazione del 1631.

Infine, la lava L presente a tetto dei fronti delle cave 2-3-4-5 segue i contorni del corpo lavico del 1760 ormai in gran parte asportato e cartografato nel passato dal De Bottis (1762) e da Le Hon (1861).

E' da rilevare, a tale riguardo, che parte del fronte di questa lava è presente ancora nella sua posizione originaria distante poco più di 300 mt. dal mare, come descritto dal De Bottis (App. 4).

DISCUSSIONE E CONCLUSIONI

I numerosi dati di campagna, unitamente all'analisi storica delle costruzioni e dei documenti, costituiscono due importanti componenti che si integrano vicendevolmente e dalle quali non si può prescindere se si vuole affrontare uno studio rigoroso e dettagliato di alcuni dei più importanti eventi eruttivi del Vesuvio in epoca storica.

Seguendo questa metodologia di lavoro abbiamo visto come l'identificazione dell'anno di costruzione delle torri costiere di avvistamento (Torre Scassata), ci ha consentito di fare una prima suddivisione tra i prodotti dell'attività medioevale del Vesuvio compresa tra il 472 e il 1563, e quelli successivi relativi alle eruzioni del 1631 e 1760.

Per quel che concerne l'attività medioevale del Vesuvio bisogna operare una ulteriore distinzione tra quella avvenuta nell'ALTO MEDIO EVO (476-1000) e successivamente all'anno 1000.

L'alto medioevo inizia con il 476, anno che segna la fine dell'Impero Romano di Occidente; a partire da questa data vari autori segnalano numerose eruzioni. Una esauriente rassegna delle eruzioni del Vesuvio storicamente accertate durante questo periodo è stata compilata da Alfano (1924) e Moscarella (1973). In questi due lavori, sulla base di una sintetica quanto efficace analisi dei numerosi documenti storici, viene fatta una disamina degli eventi tramandati e della loro attendibilità. Nella Tab. I vengono raggruppate le età delle eruzioni storicamente accertate e di quelle incerte o addirittura inventate, segnalate durante l'alto medioevo (476-1000). La fonte dei dati è costituita dai due lavori precedentemente menzionati. Nella stessa Tabella vengono raggruppate, seguendo il medesimo criterio, le date delle eruzioni

avvenute dopo l'anno 1000. La fonte dei dati è costituita dal lavoro di Alfano (1924).

In base a quanto riportano le cronache, tra il 472 e il 1631 si sarebbero verificate ben 52 eruzioni, comprese quelle incerte, delle quali solo 8 sarebbero quelle sicuramente accertate. L'analisi stratigrafica effettuata nell'ambito del settore preso in considerazione in questo lavoro evidenzia la presenza di prodotti derivanti da una consistente attività effusiva ed esplosiva verificatasi in epoca medioevale.

TAB. I - EVENTI ERUTTIVI STORICAMENTE ACCERTATI, INCERTI O INVENTATI DELL'ATTIVITA' STORICA DEL VESUVIO.
(ALFANO 1924-MOSCARELLA 1973)

EVENTI ERUTTIVI VERIFICATISI TRA IL 476 E IL 1000	
STORICAMENTE ACCERTATI	STORICAMENTE INCERTI O INVENTATI
512*	473, 474, 536, 556, 557,
685	646, 651, 748, 760, 769,
787	879, 891, 980, 981, 982,
968	983, 991, 993, 994, 1000,
999	

EVENTI ERUTTIVI VERIFICATISI TRA IL 1000 E IL 1631	
STORICAMENTE ACCERTATI	STORICAMENTE INCERTI O INVENTATI
1007*	1000, 1013, 1024, 1027,
1037**	1035, 1036, 1038, 1049,
1139	1050, 1137, 1138, 1150,
	1254, 1270, 1306, 1347,
	1360, 1430, 1440, 1500,
	1501, 1538, 1545, 1568.

* Eventi che hanno dato effusioni laviche.

** Effusioni laviche giunte a mare.

Un importante elemento di riscontro in tal senso è costituito dalla sezione di Villa Balke (fig. 2H) la quale, oltre ad aver reso possibile una correlazione delle la-

ve di Villa Inglese con quelle che affiorano lungo la costa verso est (fig. 3), consente, in pratica, di stabilire la presenza di almeno 8 eruzioni, tra esplosive ed effusive.

Questo numero di eruzioni corrisponde grosso modo alla realtà stando a quanto accertato anche in altre aree della fascia pedemontana vesuviana dove si rinvencono lo stesso numero di livelli eruttivi in cui i prodotti esplosivi della attività medioevale sono intercalati tra i livelli del 472 e del 1631 (Rolandi, lavoro in prep.). Se si tiene conto infine di qualche altro evento segnalato nel settore S-SW del Vesuvio, per es. a Torre Bassano, le cui lave certamente non sono ascrivibili all'eruzione del 1631 ma all'attività medioevale, si può concludere che delle eruzioni segnalate come certe si trovano effettivamente riscontri negli studi sul terreno.

Osserviamo intanto che le date del 1139 e del 1480, ricavate con i metodi radiometrici precedentemente menzionati furono in realtà rapportate ad una successione stratigrafica dimostratasi inesatta.

Con riferimento alla fig. 2i, che compendia la sintesi stratigrafica nell'area di Villa Inglese, i campioni datati apparterrebbero rispettivamente alla I^{\wedge} ed alla 2^{\wedge} lava presente sotto la "lava Villa Inglese" (L_3 e L_4). Se a queste lave attribuiamo le sopracitate età, il "livello Villa Inglese" stesso sarebbe compreso tra il 1480 e il 1631.

Questa possibilità, a nostro avviso, è da scartare, mancando qualsiasi riferimento storico certo che menzioni una consistente attività intorno al 1500.

Ci riserviamo, a tal proposito, di produrre in seguito i dati derivanti dalle analisi radiometriche dei vari paleosuoli inseriti nelle successioni stratigrafiche nell'ambito dello studio più generale a cui abbiamo fatto cenno in precedenza.

Nella sezione di fig. 2i, la successione piroclasti-lava L₁ si pone a tetto della "lava Villa Inglese". Le documentazioni storico-architettoniche relative alle strutture presenti in questa località di Torre del Greco (Masseria di Donna Chiara) dimostrano che il membro lavico della successione è riferibile all'eruzione del 1631.

E' già stato osservato che l'esistenza di tali lave è stata messa in discussione (Rosi e Santacroce, 1986) e che tale convinzione è stata successivamente ribadita in occasione della redazione della carta geologica del complesso vulcanico del Somma-Vesuvio (Rosi et al. 1986).

Riteniamo, invece, che le testimonianze storiche presenti nella località Villa Inglese, come in altre località (Torre Annunziata) (Russo e Rolandi, 1987) confermano pienamente che l'eruzione del 1631 durante le varie fasi dell'attività ha emesso lave, oltre che prodotti piroclastici.

Per quel che concerne l'esistenza delle lave, nel rimandare quest'argomento ad un prossimo lavoro riguardante esclusivamente l'eruzione del 1631 (Rolandi e Russo, lavoro in preparazione), vogliamo porre l'attenzione ancora una volta sulle conclusioni di Braccini nella sua descrizione dell'eruzione del 1631 dove questo autore chiaramente evidenzia l'esistenza di tre tipi di "Torrenti" (App. 3). A tal proposito va rimarcato che nelle diverse descrizioni antiche (App.4) le lave della attività medioevale furono raffigurate come "Torrenti gravidi di zolfo che si dirigevano verso la marina". Poiché la presenza, lungo tutto il litorale, delle sole lave non può generare alcuna sorta di equivoco relativamente alla presenza di eventuali altri tipi di depositi da flusso (flow, surge), i "torrenti gravidi di bitume e di zolfo" descritti in età medioevale, non possono essere altro che lave.

E, d'altra parte, quale migliore esempio di un torrente costituito da materiale viscoso che fluisce, quale il

bitume o metalli fusi, per descrivere le proprietà reologiche delle lave che scorrono lentamente sul pendio? Questo modo di raffigurare le lave è stato ampiamente utilizzato anche nel 1600 e nel 700 (App. 4) e quindi quando il Braccini (1632) distingue tra i vari torrenti quelli di tipo bituminoso, si riferisce nel caso specifico alle lave. In riferimento alla possibile esistenza dei flussi piroclastici, lo stesso Braccini quando descrive gli altri tipi di "Torrenti" rende efficacemente l'immagine di corpi piroclastici che si depositano per scorrimento al suolo. Questa segnalazione storica potrebbe supportare, in generale, l'esistenza dei flussi piroclastici per l'eruzione del 1631, ma è ancora da dimostrare che essi siano diffusi in maniera continua per un arco di oltre 180° nell'ambito della fascia pedemontana vesuviana (Rosi et al. 1986).

Così ad es. nella zona da noi presa in considerazione, desta qualche perplessità l'ampia diffusione di prodotti da flussi piroclastici legati alla eruzione del 1631 in virtù del fatto che la settecentesca Villa Prota sarebbe stata in realtà ricostruita su di una struttura già esistente nel 1500 (App. 5). Se una tale affermazione troverà ulteriori conferme, resterà da comprendere come mai la vecchia struttura sia stata risparmiata da detti flussi piroclastici, la cui presenza nella zona di Villa Inglese è stata recentemente ritenuta possibile in larga misura (Rosi et al. 1986).

In conclusione, i dati stratigrafici relativi alla località Villa Inglese di Torre del Greco, consentono di chiarire alcuni importanti aspetti dell'attività del Vesuvio in epoca storica. A questo riguardo la metodologia di studio basata sulle ricerche di campagna integrate da analisi storiche si è dimostrata di estrema utilità nell'acquisizione di dati, soprattutto in chiave cronologica.

Seguendo tale criterio, e con l'aiuto di dati radiometri-

ci, ci proponiamo di prendere in considerazione in un prossimo futuro lo studio dell'intera fascia meridionale vesuviana dal quale potranno scaturire preziose informazioni sia sull'attività storica che sull'attività preistorica e protostorica del Vesuvio.

APPENDICE STORICA

1 - LE TORRI COSTIERE

Già a partire dai secoli X e XI, ma soprattutto nel XIII^{mo} sec. (editto di Carlo I del 1269) e del XIV^{mo} sec. (prima metà del secolo sotto il regno di Roberto D'Angiò) fu decisa la realizzazione di un sistema di torri di avvistamento e di difesa costiera lungo tutta la costa per difendere gran parte del regno di Napoli esposto alle scorrerie degli antichi pirati Pisani, Genovesi e Musulmani.

Più tardi, nel 1563, in piena dominazione spagnola il vicerè Parafan de Ribera Duca D'Alcalà avviò un programma di costruzione di torri costiere con l'intento di proteggere le coste del Regno dalla minaccia dei predoni Musulmani, dopo le sanguinose devastazioni di Sorrento e Massa Lubrense avvenute nel 1558.

Fu così messo a punto un progetto che prevedeva l'innalzamento di torri in punti della costa tali che ciascuna torre fosse in vista dell'altra in modo da realizzare nell'insieme una unica ed ininterrotta serie di fortificazioni. Sorsero così sul solo litorale campano 136 torri.

La tipologia delle torri seguiva lo stesso progetto architettonico con impostazione su base quadrata secondo l'esempio fornito dalle torri romane (fig. 1). Fu esclusa la forma poligonale o cilindrica adottata nei sec. X e XI e più tardi dagli Svevi e Angioini, in quanto la tipologia

a base quadrata, oltre ad una solidità di fondazione, garantiva la possibilità di ospitare numerose persone in caso di pericolo.

Il progetto di costruzione delle torri fu portato a termine nel 1570 (L. Santoro, 1967, 1982; Pasanisi O. 1926). Esempi di torri costiere di tale periodo lungo il litorale Torrese sono rappresentati dalla Torre di Bassano, Torre Scasata e dalla Torre di Rovigliano.

La Torre dell'Oncino, oggi scomparsa, con struttura poligonale era invece di età angioina.

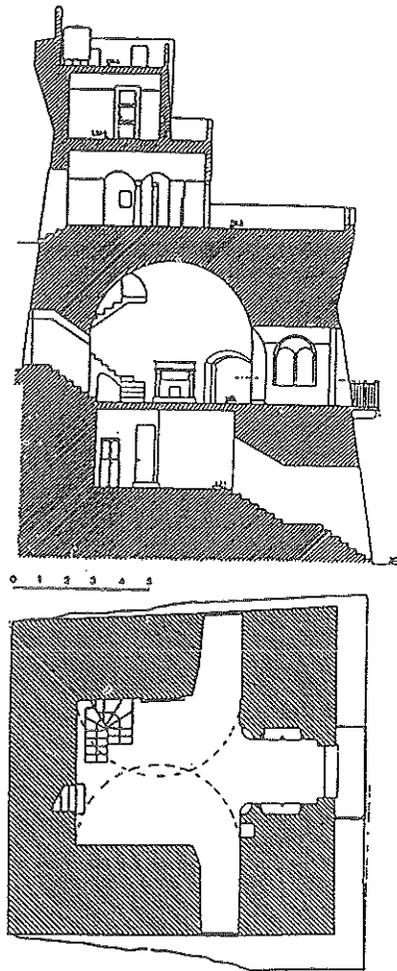


Fig. I - Pianta e sezione di una torre costiera del periodo 1563-70 (Santoro 1967).

La Masseria di Donna Chiara presenta il suo ingresso a metà lunghezza di Via Europa. Tale Masseria, adesso in gran parte abbandonata e in stato di evidente degrado, è appartenuta ai signori Gurgo del Regio Consiglio di Napoli durante tutto il XVIII secolo. Di sicuro le prime notizie risalenti allo stato della proprietà dei Gurgo nel territorio di Fossa Cupa (o Le Mortelle) risalgono all'anno 1700. Alcune altre notizie che trattano dello stesso argomento sono riferite dal Di Donna (1912) al 1698. Riportiamo qui di seguito uno stralcio del documento d'epoca con cui il Loffredo (1983) a pag. 330 descrive lo stato del luogo dove è ubicata la proprietà dei Gurgo: S. giuseppe de Curtis ... loco La Fossa Cupa ... 27 settembre 1711... "et icon excellentis et peritissimi Pictoris nostratis Lucae Giordani"...

... "nel luogo detto Fossa Cupa... con gli eredi q. m. Sig. Canio Gurgo ... di D. Giovanni di Gioia... (Gurgo Regio Consigliere) ... Flavium titulo emptionis factae a D.na Principessa Ostiliani ... quadam masseriam partim arbi-statam... et incultam causa incendii Vesuvi Montis de anno 1631 ... in loco dicto Fossa cupa, iuxta aliam partem dictae massariae emptam per V. I. Doctorem Lucam Antonium De Curtis a ponente, viam realem a tramontana, iuxta maritimam a meridie, et iuxta bona Antonii et fratrum de Cirillo a levante ... 9 dicembre 1700".

Come chiaramente si evince dalla lettura di questo brano il territorio ove è ubicata la Masseria era in parte arbustato e in parte incolto ancora agli inizi del 1700 a causa dell'eruzione del 1631.

3) ALCUNE NOTIZIE STORICHE SULL'ERUZIONE DEL 1631: "SULL'INCENDIO FATTOSI NEL VESUVIO" (G. C. BRACCINI 1632)

Il Braccini alla fine della sua esauriente relazione, tenta una conclusione delle principali fasi che hanno caratterizzato la grande eruzione del 1631. Egli scrive tra l'altro: "... què fiumi, al parer mio, sono stati di tre sorti: li primi cioè, che scorsero verso mezzogiorno la mattina delli 17 e versarono dalla bocca della voragine antica, come versa l'acqua dalla pignatta quando bolle, furono di solfo e di bitume squagliato e mescolato ad'acqua... e per questo per essere materia flussibile (pag. 95)... in alcuni luoghi passati senza abbruciare... Per questo potette toccare un luogo alto, e lassare il basso, e scorrerre anco a traverso, e in obliquo, lassando un luogo, benché il fusse dirimpetto, e toccandone una altro senza che vi intervenisse miracolo. In altri luoghi abbruciarono quanto trovarono... e questi furono quelli che svelsero le case, gli arbori e quanto trovarono e trasportarono le massarie... Li nostri primi (torrenti)... oltre al vento contenessero in sé cenere e materie bituminose e nitrose ardenti e liquide, e però non si alzarono... ma andassero serpendo per terra, o a quella vicino or sotto, ad or sopra li stessa e che dove erano più densi... facessero maggior danno. ... (pag. 96). ... Li secondi (torrenti) che scorsero la mattina dopo le 16 ore e poi negli altri giorni, notati da tutte le bande e particolarmente verso Settentrione e Levante, non può negarsi che fussero torrenti di acqua, se bene mescolati con altre materie... non essendo in questi tempi piovuto (pag. 96) ... quelle acque uscirono dalla voragine e furono spinte all'aria nel modo, che furono alzate le pietre e la arena, e in que giorni caddero, dalla forza del fuoco... delli spiriti ... e dal vento ... Il che, come avvenir potesse, sarà forse alquanto più difficile a dare

ad intendere al volgo ... come in un medesimo tempo potesse uscire da quella voragine fuoco ed acqua, ne come questa si fosse cotanto alzata (pag. 98) ... Ma la terza specie di torrenti, che son quelli li quali giornalmente scorrono, è certo che si fanno di acqua piovana (pag. 100)..."

4 - IL SIGNIFICATO DEI "TORRENTI" DESUNTO DALL'ESAME DEI DOCUMENTI DELL'ATTIVITA' DEL VESUVIO IN EPOCA STORICA

In molte descrizioni degli eventi eruttivi riportate in manoscritti dell'alto medio evo (Alfano 1924) compaiono descrizioni attraverso le quali gli antichi autori tentano di raffigurare il movimento del flusso lavico che dal pendio del Vesuvio si dirigeva verso il mare di Torre del Greco.

Si legge a proposito dell'eruzione del 685 (traduzione dal greco della "legenda greca di S. Gennaro" di Falcone Beneventano): -"Extremis Costantini Augusti, et Benedicti II Papae temporibus indict XIII Neafalis eum frequentissimis cuncuteretur, ita ut tota regio dimoveri videretur, plurimum omnique ex parte reformidabat indicium extremum. Ante haec autem signa in caelo furent. Postea IV Kal Martias, cum hic eructassimos ignis fluvios circumposita loca combussit; et facto ex cursu usque ad mare arsit ifuis in mari, velut ac si liguum arderet".

Per l'eruzione del 968 S. Pier Damiani nel cap. IX dell'opuscolo XIX, scritto tra il 1058 e 1061, riporta:

- "Quo Mortuo mons Vesuvius, unde videlicet gehenna frequenter eructat, in fiammas erupit; nam quaecumque in illis partibus reprobis dives moritur, ignis erumpere da preadicto monte videtur, tantaque sulphureas resinae congeries ex ipso Vesuvio protinus fluit, ut torrentem faciat atque decurrent impetu in mare descendant".

Questo modo di descrivere le lave si è protratto fino ai secoli XVII^{mo} e XVIII^{mo}. Riportiamo ancora una descrizione delle lave dell'eruzione del 1631 fatta dal Braccini.

- "Appresso calando il medesimi torrenti verso la marina, si distinsero in tre rami: uno di quelli prese verso Bosco, l'altro fra la Torre dell'Annunciata e quella del Greco, e il terzo e minore di tutti sopra Resina. Da questi torrenti è noto il maggior danno, che ricevuto si sia in quelle parti. Perchè precedendo loro prima in monte della piovuta cenere, e poi una macera di pietre infuocate e una selva di arbori che tuttavia ardevano parte vomitati dalla voragine stessa, e parte spianati dalla montagna, seguitarono appresso i pelaghi delle acque sulfuree e bituminose, cotanto ardenti che sembravano più tosto piombo, o stagno liquefatto che altri liquore".

Nello studio del De Bottis (1762) sull'eruzione del 1760 si fa ancora uso della descrizione della lava raffigurata come un torrente di liquido viscoso. Qui, comunque, comincia ad apparire la parola "lava" in sostituzione del termine "torrente":

- "Verso l'ore 23 1/2 dell'istesso giorno 23 di Dicembre dal Vulcano G* (tav. II fig. 3) uscì con furioso empito una fiumana di fuoco (che i paesani chiamano lava) e intorno all'ore 24 dal vulcano A (tav. II, fig. 3) ne sboccò un'altra che per l'opportunità del sito si unì colla prima, sicché tutte e due formarono un vasto e spaventevole torrente che cominciò a calar giù per lo pendio verso la real strada, che da Napoli conduce alla Torre della Nunziata.

* Una delle tante bocche da cui fuoriuscì la lava. Ricordiamo in proposito la magistrale descrizione del De Bottis dell'apparato di bocche eccentriche che caratterizzò l'eruzione.

"... Imperocché io il giorno 30 del detto mese di dicembre in mentre scorreva il mentovato torrente, vidi il fondo di quel canale tutto acceso ed infiammato e mi parve di vedere, tra il tenue fumo, che n'usciva, lentamente scorrere la liquefatta bituminosa materia".

5 - ALCUNE NOTIZIE SULL'ERUZIONE DEL 1760.

Le notizie storiche su questa eruzione ci sono state tramandate, come già osservato, dal pregevole lavoro di Gaetano De Bottis (1762); Si tratta, a nostro avviso, del primo studio che pone su base scientifica la descrizione di un fenomeno vulcanico, differenziandosi nettamente dai lavori puramente descrittivi, e talora fantasiosi, del 1500 e 1600.

Nella parte iniziale del lavoro il De Bottis, nell'illustrare i percorsi dei vari rami delle colate, cita di volta in volta le strutture danneggiate ed i rispettivi proprietari riportandone la ubicazione su di una carta schematica, unitamente alla cartografazione dei corpi lavici.

- "La principal corrente in tanto seguì infuriatamente il suo cammino verso la suddetta Reale strada, e in essa giunse intorno alle ore 11 della notte, che precedette il dì 2^o mercoledì. All'ore 11 $\frac{1}{2}$ dell'istessa notte avendo già rotto e rovesciato il muro superiore della sopradetta pubblica strada e ingombrato di essa un tratto lungo canne 200 e largo canne 7 e palmi 6, abbatté l'altro opposto muro, e si rigonfiò intorno all'edificio dell'avvocato D. Andrea Massarante, quivi situato, fino all'altezza d'intorno a 16 palmi, e poi sboccò nei sottostanti poderi... Finalmente dall'ore 18 del giorno 31 di dicembre fino all'ore 22 del primo di del mese di Gennaio del corrente anno 1761 s'i-

noltrò verso il mare di passi 3 e si arrestò in lontananza da esso passi 156*...".

Successivamente il De Bottis passa ad analizzare il "Torrente della destra banda" indicando ancora puntualmente i danni procurati alle strutture ed i rispettivi proprietari, facendo, come detto, un elenco riportato nella Tav. I del suo lavoro (fig. II). In questa tavola si può osservare, tra l'altro che la lava, oltrepassando la Reale Strada, sfiora appena la 2^a Villa Prota.

A proposito di questa struttura osserviamo come essa viene illustrata in recenti lavori riguardanti le Ville vesuviane:

"La villa in Via Nazionale n. 521, in parte danneggiata dalla lava del 1760, mostra nella facciata verso il giardino una precedente struttura forse cinquecentesca, a cui si sovrappone nella prima metà del 1700 l'edificio barocco". (Di Monda P. 1959; Pane R. 1960).

"... Verso il 1752 i marchesi di Poppanò vollero illeggiadrare questo edificio per farne una lussuosa villa. Essi si avvalsero, a quanto sembra, dell'opera di Ferdinando Fuga che avrebbe disegnato anche l'importante portale sulla strada provinciale.

La Villa fu danneggiata dall'eruzione del 1760: la facciata, volta verso il folto bosco di più e di altre piante ad alto fusto presenta ancora qualche traccia della primitiva struttura "sobesca". Il piano terra si presenta a 3 archi: per il centrale passa il lungo viale che termina con una splendida rotonda da cui si governa il panorama del Golfo...". (Vittorio Glejeses).

... L'edificio del 1780 divenne proprietà della famiglia Prota.

*Poiché il passo napoletano a cui De Bottis si riferisce misura 2,04 mt., la distanza dal mare risulta di circa 320 mt.

Alla luce della fig. II, queste notizie necessitano di ulteriori precisazioni:

- La villa fu effettivamente danneggiata solo in parte dalla lava del 1760, ed infatti è posizionata marginalmente al corpo principale della lava in fig. II.

- Alcune strutture presenti all'interno della villa, ancora oggi evidenti, potrebbero suffragare la sua avvenuta ristrutturazione a spese di una vecchia masseria cinquecentesca.

-La rotonda situata nelle adiacenze della villa è ubicata sul corpo lavico del 1760 e quindi non fu costruita nel 1752, ma successivamente al 1760.

- Infine la data del 1780, anno in cui la villa passò in proprietà alla famiglia Prota, non sembra esatta, dal momento che tale struttura viene già indicata dal de Bottis nel 1761 come "Villa prota" (fig.II).

B I B L I O G R A F I A

- 1) Alfano G.B. (1924) - Le eruzioni del Vesuvio tra il 79 e il 1631. Osservatorio "Pio X" in Valle di Pompei, pp. 60.
- 2) Alfano G.B. e Friedlaender I. (1929) - La storia del Vesuvio illustrata dai documenti coevi. Ulm. a.d. Donau, K. Hohn, pp. 69.
- 3) Braccini G.C. (1632) - Dell'incendio fattosi nel Vesuvio a XVI di dic. 1631, Napoli, Roncagliolo, 1632.
- 4) Burri C. e Di Girolamo P. (1975) - Contributo alla conoscenza delle lave della grande eruzione del Vesuvio del 1631. Rend. Soc. Ital; di Miner. e Petrol., vol. XXX, pp. 705-740.
- 5) De Bottis G. (1762) - Ragionamento storico intorno a nuovi vulcani compresi nella fine dell'anno scorso 1760, nel territorio della Torre del Greco Napoli, 1762.
- 6) De Gaetano E. (1978) - Torre del Greco nella tradizione e nella Storia, vol. I, antiche denominazioni. Torre del Greco.
- 7) Di Donna V. (1912) - L'Università della Torre del Greco nel secolo XVII. Torre del Greco.
- 8) Di Girolamo P. (1970) - Rilevamento petrografico-stratigrafico lungo il margine SW del Vesuvio. Rend. Soc. Miner. e Petrol., vol. XXVI, pp. 2-35.

- 9) Di Monda P. (1959) - Da Resina a Torre Annunziata, Ville vesuviane del settecento in AA.VV., Napoli 1959.
- 10) Ilardi N. (1873) - Istoriografia politico-civile-ecclesiastica di Torre Annunziata. Castellammare di Stabia, 1873.
- 11) Le Hon H. (1865) - Histoire complete de la grande eruption du Vesuve de 1631. Bull. Acad. Sci. Lett. et Beaux Arts Belique, vol. 20, pp. 483-538.
- 12) Loffredo S. (1983) - "... Turris octavae alias del Greco..." - una passeggiata attraverso i secoli. E.C.S., Editoriale Comunicazioni Sociali - Napoli.
- 13) Luongo G. e Rapolla A. (1964) - Contributo allo studio della evoluzione del magma Somma-Vesuviano mediante la determinazione delle concentrazioni in isotopi radioattivi U^{228} , Th^{232} , Ra^{225} , K^{40} . Ann. Oss. Vesuviano, s.6^a, vol.6, pp. 45-66.
- 14) Moscarella E. (1973) - Le eruzioni vesuviane dell'alto medio evo storicamente accertate. Il Rievocatore, anno XXIV, nn.3-5, pp. 11-13, 1973, Napoli.
- 15) Pane R. (1960) - Ville vesuviane del '700. Napoli, 1960.
- 16) Pasanisi O. (1926) - La costruzione generale delle torri marittime ordinate dalla Real Corte di Napoli nel secolo XVI. "Studi di storia napoletana in onore di Michelangelo Schipa", Napoli, 1926.

- 17) Penta F. e Del Vecchio (1963) - Lave vesuviane dei principali centri estrattivi. Fondaz; Polit. Mezzog. d'It., pp. 1-108.
- 18) Rapolla A. e Vittozzi P. (1968) - Radioactivity of the vesuvian lavas and their dating by the disequilibrium Ra^{225} - U^{228} . Bull. Vulcanologique, vol. 32, pp. 353-364.
- 19) Rolandi G. e Russo F. (1987) - Aspetti dei depositi vulcanici di età pre-79 d.C. lungo il litorale tra i Comuni di Torre del Greco e Torre Annunziata. Atti del I Convegno dei Gruppi Archeologici della Italia meridionale, 25-27 Aprile 1986, Prata Sannita.
- 20) Russo F. e Rolandi G. - Contributo alla conoscenza dell'attività storica del Vesuvio: Dati stratigrafici e vulcanologici nel settore di SE, tra Torre del Greco (local. Villa Inglese) e Torre Annunziata. Lavoro inviato per la stampa alla Soc. Geol. Ital.
- 21) Rolandi G. e Russo F. - Geologia e Vulcanologia del settore meridionale del Vesuvio - Lavoro in preparazione.
- 22) Rolandi G. e Russo F. - La grande eruzione vesuviana del 1631 - Lavoro in preparazione.
- 23) Rolandi G. - L'attività esplosiva storica (472-1631) del Vesuvio - Lavoro in preparazione.
- 24) Rosi M. e Santacroce R. (1986) - L'attività del Somma Vesuvio precedente l'eruzione del 1631. Dati stratigrafici

ci e Vulcanologici. Tremblement de Terre, Erup-
tions Volcaniques et vie des hommes dans la Cam-
panie Antique - Biblioteque de l'institut Fran-
çais de Naples. Deuxieme serie - vol. VII.

- 25) Rosi M., Santacroce R. e Sbrana A. (1986) - Carta geologica
del complesso vulcanico Somma-Vesuvio. Consiglio
Nazionale delle Ricerche, Progetto finalizzato
Geodinamica, sotto progetto 3: sorveglianza dei
vulcani attivi e rischio vulcanico.
- 26) Santoro L. (1967) - Le torri costiere della Campania. Napoli
Nobilissima - Vol. VI - Fase I-II.
- 27) Santoro L. (1982) - Castelli Angioini e Aragonesi nel regno
di Napoli. Rusconi, Immagini.

UN METODO ITERATIVO PER LA RISOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

MATRICIALE $AX + XB = C$

AN ITERATIVE METHOD FOR THE SOLUTION OF THE MATRIX

EQUATION $AX + XB = C$

Giuliana Criscuolo (¹)

Abstract. - An iterative method for solving the matrix equation $AX + XB = C$ is outlined. It is a third-order method and its application does not require matrix inversion.

Sommario. - In questo lavoro si introduce un metodo iterativo del terzo ordine per la risoluzione dell'equazione matriciale $AX + XB = C$, la cui applicazione non richiede inversioni di matrici.

- Introduzione -

Siano A e B due matrici quadrate rispettivamente di ordine n ed m e C una matrice rettangolare con n righe ed m colonne.

Si consideri l'equazione matriciale:

$$(1) \quad AX + XB = C$$

che interviene frequentemente nella risoluzione numerica di equazioni differenziali ordinarie e alle derivate parziali (Bickley e McNamee [1]) e nell'analisi di stabilità (Barnett e Storey [2]). Bartels e Stewart [3] presentano un algoritmo per la risoluzione dell'equazione (1) basato sulla riduzione di Schur delle matrici A e B in forma triangolare. Beavers e Denman [4] considerano il caso in cui $A = B^T$. Hoskins, Meek e Walton [5] presentano un metodo iterativo per il caso in cui gli autovalori di A e B hanno parte reale positiva. Sono stati studiati altri metodi iterativi ([6], [7]) anche essi convergenti nell'ipotesi che gli autovalori di A e B

(¹) Istituto per Applicazioni della Matematica del CNR - Napoli -

appartengano al semipiano $\text{Re } z > 0$. Tali metodi consistono nel trasformare l'equazione (1) nell'equazione:

$$f(A)X - Xf(B) = F(A,B,C)$$

con f funzione razionale opportuna ed F univocamente determinata in corrispondenza, e nel considerare le equazioni:

$$A_n X + X B_n = C_n \quad n \in \mathbb{N}$$

con

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= f(A_n) & A_0 &= A & n \in \mathbb{N} \\ B_{n+1} &= -f(-B_n) & B_0 &= B & n \in \mathbb{N} \\ C_{n+1} &= F(A_n, B_n, C_n) & C_0 &= C & n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Se il procedimento iterativo $z_{n+1} = f(z_n)$ converge, in un opportuno insieme, ad 1, e se gli autovalori di A e B appartengono alla regione di convergenza del predetto procedimento iterativo, allora la successione $\left\{ \frac{1}{2} C_n \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge alla soluzione del problema. Di questi algoritmi si è dimostrato essere il più efficiente l'algoritmo segno di Beavers e Denman [4] in cui si considera come funzione di iterazione la funzione:

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

Questo procedimento è stato applicato poi da Hoskins, Meek e Walton [5] all'equazione (1).

Mastroserio e Montrone [8] introducono un metodo iterativo del

secondo ordine che non prevede inversioni di matrici, basato sul solo prodotto di matrici dello stesso tipo di A, B e C. In tal modo si elimina l'instabilità numerica che si presenterebbe se una delle due matrici A o B non fosse ben condizionata. La regione di convergenza non è l'intero semipiano destro, ma è sempre possibile ricondursi alla regione $\text{Re } z > 0, |\text{Im } z| < \text{Re } z$.

Nello stesso ordine di idee, si introduce in questo lavoro un metodo iterativo per la risoluzione di equazioni matriciali a convergenza di ordine superiore. D'altra parte si dimostra l'esistenza di una costante c legata agli autovalori delle matrici A e B, tale da ricondurre la regione di convergenza del metodo iterativo alla regione del piano complesso $\text{Re } z > 0, |\text{Im } z| < \text{Re } z$.

- Formulazione e convergenza del metodo -

Si consideri la funzione complessa f così definita:

$$(2) \quad f(z) = \frac{1}{8} (3z^5 - 10z^3 + 15z) \quad z \in \mathbb{C}$$

La funzione $f(z)$ è analitica in \mathbb{C} e la sua restrizione ad \mathbb{R} è una funzione dispari.

Si osservi, inoltre, che la funzione $f(z)$ ammette come punti fissi $0, \pm 1, \pm \sqrt[3]{\frac{7}{3}}$; in particolare, i punti ± 1 sono punti di attrazione.

Considerato il procedimento iterativo:

$$(3) \quad z_{n+1} = f(z_n) \quad z_0 \in \mathbb{C}$$

di cui la funzione $f(z)$ rappresenta la funzione di iterazione, essendo:

$$f'(\pm 1) = f''(\pm 1) = 0 \quad f'''(\pm 1) \neq 0$$

esso risulta del terzo ordine al fine della determinazione delle radici ± 1 dell'equazione:

$$z = f(z)$$

Si osservi esplicitamente che la $f(z)$ definita tramite la (2) è l'unica funzione polinomiale di quinto grado sotto le condizioni precedentemente indicate e che saranno utili nel seguito.

E' possibile stabilire il seguente:

- Teorema 1. -

Ogni soluzione dell'equazione (1) è anche soluzione dell'equazione:

$$(4) \quad A_n X + X B_n = C_n \quad n \in \mathbb{N}$$

ove:

$$A_{n+1} = f(A_n)$$

$$A_0 = A$$

$$(5) \quad B_{n+1} = f(B_n)$$

$$B_0 = B$$

$$C_{n+1} = \frac{3}{8}(A_n^4 C_n + C_n B_n^4) - \frac{3}{8}A_n(A_n^2 C_n + C_n B_n^2 - A_n C_n B_n)B_n + \\ - \frac{5}{4}(A_n^2 C_n + C_n B_n^2 - A_n C_n B_n) + \frac{15}{8}C_n$$

$$C_0 = C$$

Dalla (1), moltiplicando a sinistra per A^2 , segue:

$$(6) \quad A^3 X + A^2 X B = A^2 C$$

e moltiplicando a destra per B^2 :

$$(7) \quad A X B^2 + X B^3 = C B^2$$

Sommando membro a membro le (6) e (7), si ha:

$$A^3 X + X B^3 = A^2 C + C B^2 - A^2 X B - A X B^2$$

cioè:

$$A^3 X + X B^3 = A^2 C + C B^2 - A(A X + X B)B$$

e quindi:

$$(8) \quad A^3 X + X B^3 = A^2 C + C B^2 - A C B$$

Moltiplicando, poi, ambo i membri della (1) a sinistra per A^4 , si ha:

$$(9) \quad A^5 X + A^4 X B = A^4 C$$

e moltiplicando a destra per B^4 :

$$(10) \quad A X B^4 + X B^5 = C B^4$$

Sommando membro a membro le (9) e (10), si ottiene:

$$A^5 X + X B^5 = A^4 C + C B^4 - A^4 X B - A X B^4$$

cioè:

$$(11) \quad A^5 X + X B^5 = A^4 C + C B^4 - A(A^3 X + X B^3)B$$

Per la (8), la (11) diventa:

$$(12) \quad A^5X + XB^5 = A^4C + CB^4 - A(A^2C + CB^2 - ACB)B$$

Moltiplicando ambo i membri della (12) per $\frac{3}{8}$, ambo i membri della (8) per $-\frac{5}{4}$ ed ambo i membri della (1) per $\frac{15}{8}$, sommando si ha:

$$\frac{3}{8}(A^5X+XB^5) - \frac{5}{4}(A^3X+XB^3) + \frac{15}{8}(AX+XB) = \frac{3}{8}(A^4C+CB^4) - \frac{3}{8}A(A^2C+CB^2-ACB) + \\ - \frac{5}{4}(A^2C+CB^2) + \frac{5}{4}ACB + \frac{15}{8}C$$

da cui:

$$\left(\frac{3}{8}A^5 - \frac{5}{4}A^3 + \frac{15}{8}A\right)X + X\left(\frac{3}{8}B^5 - \frac{5}{4}B^3 + \frac{15}{8}B\right) = \frac{3}{8}(A^4C+CB^4) - \frac{3}{8}A(A^2C+CB^2-ACB)B + \\ - \frac{5}{4}(A^2C+CB^2-ACB) + \frac{15}{8}C$$

La proprietà è dunque vera per $n=1$.

Operando in modo analogo sull'equazione (4), si ottiene un'equazione equivalente, che con le posizioni (5) diventa la (4) scritta con $n+1$ in luogo di n .

Per il principio di induzione si ottiene la tesi.

Si vuole ora studiare la convergenza del procedimento iterativo introdotto. Sussiste invero il seguente:

- Teorema 2. -

La funzione $f(z)$ definita mediante la (2) è stabile nell'aperto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |1 - z^2| < 1\}$, cioè $f(\Omega) \subseteq \Omega$. Inoltre la successione determinata dalla (3) con $z_0 \in \Omega$ converge ad 1 con convergenza di ordine tre.

Si osservi che è:

$$(13) \quad 1 - f^2(z) = \frac{1}{64}(1 - z^2)^3(9z^4 - 33z^2 + 64) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

D'altra parte $\forall z \in \Omega$, essendo $|1 - z^2| < 1$, risulta: †

$$\left| \frac{9}{64}z^4 - \frac{33}{64}z^2 + 1 \right| < 1$$

Pertanto dalla (13) si ottiene:

$$(14) \quad |1 - f^2(z)| < |1 - z^2|^3 \quad \forall z \in \Omega$$

Quindi, $\forall z \in \Omega$ risulta:

$$(15) \quad |1 - f^2(z)| < 1$$

Si consideri ora il cerchio aperto W del piano complesso di centro $w_0=1$ e raggio unitario, cioè:

$$W = \left\{ w \in \mathbb{C} : |1 - w| < 1 \right\}$$

e la funzione radice quadrata g presa a parte reale positiva. Si osservi che l'aperto Ω è connesso essendo $\Omega = g(W)$ con g continua e W connesso.

Dalla (15) segue, poi, che $\forall z \in \Omega$, la parte reale di $f(z)$ non si annulla. Essendo dunque Ω connesso, $\operatorname{Re} f(z) \neq 0 \quad \forall z \in \Omega$, ed $f(1)=1$, si ha:

$$(16) \quad \operatorname{Re} f(z) > 0 \quad \forall z \in \Omega$$

La (15) e la (16) assicurano la stabilità della funzione $f(z)$ nello insieme Ω .

Osservando che $\operatorname{Re} z > 0$ implica la condizione $|1 + z| > 1$, si ha:

† Invero, posto:

$$\xi = z^2$$

ed effettuata la trasformazione involutoria:

$$\xi \rightarrow 1 - \xi$$

si ha che $\forall \xi \in \mathbb{C}$ tale che $|\xi| < 1$, risulta:

$$\left| \frac{9}{64}(1 - \xi)^2 - \frac{33}{64}(1 - \xi) + 1 \right| \leq \frac{9}{64}|\xi|^2 + \frac{15}{64}|\xi| + \frac{5}{8} < 1$$

$$(17) \quad |1 - z^2| > |1 - z| \quad \forall z \in \Omega$$

Per la (17), dalla (14) segue:

$$(18) \quad |1 - z_n| < |1 - z_0^2| 3^n \quad \forall z_0 \in \Omega$$

La (18) assicura la convergenza ad 1 della successione determinata dalla (3) con $z_0 \in \Omega$.

- Teorema 3. -

Assegnata la matrice A con autovalori appartenenti alla regione $\operatorname{Re} z > 0$, $|\operatorname{Im} z| < \operatorname{Re} z$, esiste un numero reale positivo c tale che gli autovalori della matrice cA appartengano all'aperto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |1 - z^2| < 1\}$.

Sia:

$$\Lambda_A = \{\lambda_k, k = \overline{1, n}\}$$

lo spettro della matrice A , ove con n se ne indica l'ordine.

Fissato $c \in \mathbb{R}^+$, risulta ovviamente:

$$\Lambda_{cA} = \{c\lambda_k, k = \overline{1, n}\}$$

Per dimostrare il teorema è necessario determinare un numero reale positivo c in modo che risulti:

$$(19) \quad \Lambda_{cA} \subset \Omega$$

Affinchè sia verificata la (19) occorre e basta che sia:

$$(20) \quad \operatorname{Re}(c\lambda_k) > 0 \quad k = \overline{1, n}$$

$$(21) \quad |1 - (c\lambda_k)^2| < 1 \quad k = \overline{1, n}$$

Le (20), qualunque sia il numero reale positivo c , sono una ovvia

conseguenza delle ipotesi.

Si ponga:

$$\sigma = \min_{k=\overline{1,n}} \frac{(\operatorname{Re} \lambda_k)^2 - (\operatorname{Im} \lambda_k)^2}{|\lambda_k|^4}$$

Si osservi che, essendo $\operatorname{Re} \lambda_k \neq 0$ e $|\operatorname{Im} \lambda_k| < \operatorname{Re} \lambda_k$, risulta $\sigma > 0$.

Si ha:

$$|1 - (c\lambda_k)^2| = \sqrt{1 + c^4 |\lambda_k|^4 - 2c^2 [(\operatorname{Re} \lambda_k)^2 - (\operatorname{Im} \lambda_k)^2]}$$

Affinchè siano allora verificate le (21), la costante reale $c > 0$ deve esser tale che:

$$c^2 |\lambda_k|^4 - 2 [(\operatorname{Re} \lambda_k)^2 - (\operatorname{Im} \lambda_k)^2] < 0 \quad k = \overline{1,n}$$

Essendo:

$$\frac{(\operatorname{Re} \lambda_k)^2 - (\operatorname{Im} \lambda_k)^2}{|\lambda_k|^4} \geq \sigma \quad k = \overline{1,n}$$

si ottiene la seguente limitazione superiore per la costante c :

$$c < \sqrt{2\sigma}$$

Nel caso particolare in cui la matrice A ammette solo autovalori reali, risulta:

$$\sigma = \min_{k=\overline{1,n}} \frac{1}{\lambda_k^2}$$

e pertanto, indicato con λ il raggio spettrale di A , si ottiene per la costante c la seguente limitazione:

$$0 < c < \frac{\sqrt{2}}{\lambda}$$

E' ovvia conseguenza di tale teorema che, assegnate due matrici A e B di ordine rispettivamente n ed m, risulta:

$$\Lambda_{cA} \subset \Omega \quad \Lambda_{cB} \subset \Omega$$

quale che sia la costante reale c verificante le limitazioni:

$$(22) \quad 0 < c < \sqrt{2 \sigma}$$

ove:

$$\sigma = \min \left\{ \min_{k=1, n} \frac{(\operatorname{Re} \lambda_k)^2 - (\operatorname{Im} \lambda_k)^2}{|\lambda_k|^4}, \min_{k=1, m} \frac{(\operatorname{Re} \beta_k)^2 - (\operatorname{Im} \beta_k)^2}{|\beta_k|^4} \right\}$$

con $\lambda_k \in \Lambda_A, \beta_k \in \Lambda_B$.

Si richiama la seguente proprietà sulle funzioni di matrici [9]:
 - Una successione di matrici $f_p(A)$ converge al divergere di p, se e solo se la successione $f_p(\lambda)$ converge sullo spettro di A al divergere di p; di più, l'uguaglianza:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(\Lambda_A) = f(\Lambda_A)$$

implica l'altra:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} f_p(A) = f(A)$$

e viceversa.

Ciò premesso, si dimostra il seguente:

- Teorema 4. -

Assegnata l'equazione (1) con A e B matrici i cui spettri sono contenuti nella regione $\operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < \operatorname{Re} z$, fissata una costante reale c verificante le limitazioni (22), lo schema iterativo (4)

applicato all'equazione:

$$(cA)X + X(cB) = cC$$

risulta convergente alla soluzione X dell'equazione (1).

Per le ipotesi le matrici cA e cB hanno spettro contenuto nello insieme $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |1 - z^2| < 1\}$, che è di convergenza ad 1 per la funzione di iterazione f definita dalla (2).

Per la proprietà sulle funzioni di matrici precedentemente richiamata, si ha allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(cA_n) = I$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(cB_n) = I$$

Pertanto la soluzione X dell'equazione (1) può essere determinata come:

$$X = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} f(C_n)$$

- Un esempio numerico -

Il metodo introdotto in questo lavoro è stato applicato al seguente esempio:

$$A = B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La soluzione esatta è:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Essendo:

$$\Lambda_A = \Lambda_B = \left\{ \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \right\}$$

si ottiene per la costante reale positiva c la seguente limitazione superiore:

$$c < \frac{1}{2} \left(2 - \frac{\sqrt{10}}{5} \right)$$

Fissato $c=0.35$, sono stati confrontati gli errori assoluti della soluzione numerica ottenuta mediante l'applicazione del metodo introdotto (tab.1) con quelli relativi al metodo indicato in [8] (tab.2). Ovviamente, il numero di operazioni elementari per ciascuna iterazione del metodo introdotto in questa nota è maggiore di quello relativo al metodo esposto in [8], sussistendo però equivalenza tra i costi computazionali dei due procedimenti.

Tab.1 N= numero di iterazioni

N= 5	0.10×10^{-3}	0.13×10^{-3}	0.13×10^{-3}	0.10×10^{-3}
	0.13×10^{-3}	0.16×10^{-3}	0.16×10^{-3}	0.16×10^{-3}
	0.13×10^{-3}	0.16×10^{-3}	0.16×10^{-3}	0.16×10^{-3}
	0.10×10^{-3}	0.13×10^{-3}	0.13×10^{-3}	0.16×10^{-3}
N= 6	0.55×10^{-11}	0.72×10^{-11}	0.72×10^{-11}	0.55×10^{-11}
	0.72×10^{-11}	0.89×10^{-11}	0.89×10^{-11}	0.72×10^{-11}
	0.72×10^{-11}	0.89×10^{-11}	0.89×10^{-11}	0.72×10^{-11}
	0.55×10^{-11}	0.72×10^{-11}	0.72×10^{-11}	0.55×10^{-11}
N= 7	0.	0.34×10^{-17}	0.17×10^{-17}	0.
	0.	0.69×10^{-17}	0.12×10^{-16}	0.69×10^{-17}
	0.52×10^{-17}	0.52×10^{-17}	0.86×10^{-17}	0.52×10^{-17}
	0.69×10^{-17}	0.34×10^{-17}	0.86×10^{-17}	0.69×10^{-17}

Tab.2 N= numero di iterazioni

N= 5	0.14	0.19	0.19	0.14
	0.19	0.23	0.23	0.19
	0.19	0.23	0.23	0.19
	0.14	0.19	0.19	0.14
N= 6	0.41×10^{-1}	0.54×10^{-1}	0.54×10^{-1}	0.41×10^{-1}
	0.54×10^{-1}	0.67×10^{-1}	0.67×10^{-1}	0.54×10^{-1}
	0.54×10^{-1}	0.67×10^{-1}	0.67×10^{-1}	0.54×10^{-1}
	0.41×10^{-1}	0.54×10^{-1}	0.54×10^{-1}	0.41×10^{-1}
N= 7	0.35×10^{-2}	0.46×10^{-2}	0.46×10^{-2}	0.35×10^{-2}
	0.46×10^{-2}	0.57×10^{-2}	0.57×10^{-2}	0.46×10^{-2}
	0.46×10^{-2}	0.57×10^{-2}	0.57×10^{-2}	0.46×10^{-2}
	0.35×10^{-2}	0.46×10^{-2}	0.46×10^{-2}	0.35×10^{-2}

BIBLIOGRAFIA

- [1] W.G. Bickley, J. McNamee - Matrix and other direct methods for the solution of systems of linear difference equations - Philos. Trans. Roy. Soc. London (Ser.A) 252(1960), 69-131.
- [2] S. Barnett, C. Storey - Some applications of Lyapunov matrix equation - J. Inst. Math. Appl. 4(1970), 33-42.
- [3] R.H. Bartels, G.W. Stewart - Algorithm 432, solution of the matrix equation $AX+XB=C$ [F4] - CACM 15(1972), 820-826.
- [4] A.N. Beavers, E.D. Denman - A new solution method for the Lyapunov matrix equation - SIAM J. Appl. Math. 29(1975), 416-421.
- [5] W.D. Hoskins, D.S. Meek, D.J. Walton - The numerical solution of the matrix equation $XA+AY=F$ - BIT 17(1977), 184-190.
- [6] W.D. Hoskins, D.S. Meek, D.J. Walton - A rapidly convergent method for the solution of the matrix equation $XA+AY=F$ - J. of Comput. Appl. Math. 3(1977), 211-215.
- [7] W.D. Hoskins, D.S. Meek, D.J. Walton - High-order iterative methods for the solution of the matrix equation $XA+AY=F$ - Linear Algebra 23(1979), 121-139.
- [8] C. Mastroserio, M. Montrone - Un metodo a convergenza quadratica per equazioni matriciali lineari - Calcolo 18(1981), 87-96.
- [9] F.R. Gantmacher - Théorie des matrices - Tome I, (1966), Dunod, Paris.
- [10] F.B. Hildebrand - Introduction to Numerical Analysis - (1974), McGraw-Hill Book Company, New York.

CALCESTRUZZI NORMALI E FIBROSI E QUESTIONI SPERIMENTALI

Nota di Anna Maria Reda* e Giuseppe Spadea*

Presentata dal Socio Prof. Riccardo Sersale

Adunanza del

Riassunto

La tenacità di un materiale a matrice ceramica può essere misurata attraverso la determinazione dell'energia di frattura di provini standard. Per i calcestruzzi si hanno molte difficoltà sperimentali per l'esecuzione delle prove di trazione e, conseguentemente, non tutti gli studiosi sono d'accordo sull'attendibilità delle caratteristiche meccaniche dedotte per mezzo di prove di trazione diretta. Per questi motivi, e per altri che saranno illustrati, si sono introdotte le prove di trazione indiretta per flessione su provini con e senza intaglio. Scopo del presente lavoro è quello di esaminare alcune questioni relative all'esecuzione delle prove sui calcestruzzi ordinari e fibrorinforzati e di verificarne la validità sia in relazione alla forma e dimensioni dei provini che delle modalità sperimentali.

Abstract

The toughness of a composite material with ceramic matrix can be measured by determining the fracture energy of standard specimens. In order to execute direct tensile tests on concrete many experimental difficulties may be encountered, consequently there is often disagreement over validation of the test results. For these, and other reasons outlined below, indirect tensile in flexure on notched and integer specimens has been introduced. This work aims to examine several specific problems regarding the execution of tests on plain and fiber-reinforced concrete and ultimately to verify the validity of results in relation to form and size of specimens and experimental procedure.

Introduzione

L'interesse che negli ultimi anni è stato mostrato dagli studiosi per l'applicazione della Meccanica della Frattura ai materiali cementizi ha portato alla formulazione di un metodo standard per la determinazione dell'energia di frattura dei calcestruzzi. Quest'ultima andrebbe valutata come area sottesa dalla curva carico-freccia ottenuta da prove di trazione diretta su provini tozzi. Tuttavia è alquanto complesso eseguire questa prova in maniera stabile; pertanto è stato proposto di utilizzare i risultati di prove di flessione con tre punti

* Dipartimento di Strutture, Università della Calabria - 87030 Arcavacata di Rende, Cosenza.

di carico che sono facilmente realizzabili anche nei laboratori meno attrezzati.

Nel presente lavoro; dopo aver richiamato la definizione di Energia di Frattura, si studia la sua connessione con i problemi di stabilità dimensionale e si analizza il modello proposto da Hillerborg per rappresentare il fenomeno di frattura. Si esaminano poi le diverse metodologie e difficoltà di esecuzione della prova di trazione diretta e si descrivono le procedure adottate da alcuni Autori (dimensioni dei provini e modalità di prova) che hanno consentito il tracciamento dell'intera curva tensione-deformazione.

Poichè è generalmente noto che un metodo per accrescere l'energia di frattura dei materiali cementizi consiste nell'introduzione di fibre di varia natura, si è anche ritenuto opportuno esaminare il comportamento dei materiali a matrice ceramica fibro-rinforzati per i quali una caratterizzazione in trazione è particolarmente significativa anche se sovente, per semplicità, essi sono sottoposti esclusivamente a prove di flessione. Viene descritta, infine, la procedura consigliata dalla Rilem per la valutazione sperimentale dell'energia di frattura di calcestruzzi ordinari.

Energia di frattura

Da alcuni anni a questa parte, anche ai materiali ceramici vengono applicati i concetti di "Meccanica della Frattura" al fine di caratterizzare il loro comportamento in relazione alla creazione di nuove superfici libere. La principale differenza tra il fenomeno di propagazione di una frattura nei materiali metallici e quello relativo ai materiali ceramici consiste nel fatto che per i primi il fenomeno è preceduto da una più o meno estesa plasticizzazione intorno al vertice (tip) mentre per gli altri è preceduto da una minuta e localizzata microfessurazione nella medesima zona (1).

In Meccanica della Frattura vengono distinti tre modi di frattura a secondo del tipo di spostamento relativo che le superfici di frattura subiscono (fig.1) (2) mentre lo stato tensionale in prossimità del vertice può essere rappresentato tramite lo stato elastico associato ad un fattore K definito "stress intensity factor". Quando K raggiunge un livello critico K_c , che risulta una costante del materiale, la fessura si propaga. K_c è detto "Tenacità alla Frattura" del materiale. Il caso di sollecitazione con apertura del crack in zona tesa e con i bordi della fessura che tendono ad allontanarsi (modo 1) è quello che più sovente si verifica e che è stato meglio studiato. In letteratura sono disponibili i valori del fatto-

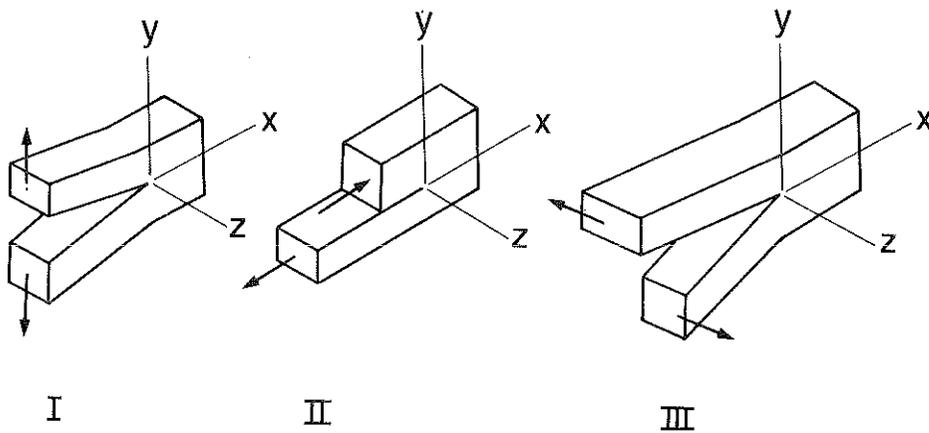


Fig. 1 - I tre principali modi di frattura: I = apertura; II = scivolamento; III = lacerazione

re di intensità degli sforzi K_I per prove di trazione pura (3) e di flessione con tre o quattro punti di carico (4,5,6). In realtà questi valori sono stati ottenuti per materiali metallici, ma vengono estesi anche ai materiali ceramici (7).

La tenacità viene correlata alla quantità di energia dissipata per la creazione di una nuova superficie unitaria esterna in un corpo sotto tensione (8); la relazione che, in Meccanica della Frattura elastica lineare, lega la tenacità alla frattura nel modo I, K_{IC} , con l'energia superficiale riferita all'area unitaria Γ è (7):

$$K_{IC} = \sqrt{2\Gamma E}$$

in cui E rappresenta il modulo di elasticità in trazione del materiale esaminato.

Il doppio dell'energia superficiale unitaria viene denominata "Energia di Frattura" ed indicata con G_f , così che la relazione tra i due parametri di tenacità diventa:

$$K_{IC} = \sqrt{G_f E}$$

Il concetto di Energia di Frattura si rivela molto utile per interpretare, anche qualitativamente, il processo di rottura degli elementi strutturali. Ad esempio, è noto che se due provini fatti dello stesso materiale vengono sottoposti a prova di flessione fino a rottura, il comportamento appare più duttile in quello di minor spessore. E' stato rilevato (8) che per introdurre l'effetto dimensionale nei problemi di ingegneria strutturale si deve far uso di modelli in cui si considera l'Energia di Frattura, mentre il comportamento più o meno duttile di un elemento strutturale è stato connesso (9) al valore del numero adimensionale:

$$S_e = G_F / b\sigma_t$$

in cui "b" è l'altezza del provino e σ_t la resistenza a trazione del materiale. La tendenza alla fragilità aumenta al diminuire di S_e .

Un modello rappresentativo del fenomeno di frattura relativo al modo I, valido per materiali coesivi, è stato proposto da Hillerborg (10) e da Petersson (11); le assunzioni del modello sono le seguenti:

- 1) Quando si raggiunge lo sforzo massimo, una sottile zona di frattura si verifica in corrispondenza di una certa sezione del provino (zona danneggiata).
- 2) Al progredire della deformazione di allungamento, dopo il raggiungimento dello sforzo massimo, la zona di danneggiamento si estende, pur essendo in grado di trasferire sforzi decrescenti con l'allungamento. E' possibile registrare la legge tensione σ - allungamento w ; mentre quest'ultimo si verifica esclusivamente nella zona danneggiata ed è nullo prima del raggiungimento dello sforzo massimo.
- 3) Il materiale si comporta elasticamente nelle zone adiacenti a quella danneggiata ed è sede di un processo di "scarico" (lo sforzo diminuisce) durante le fasi successive al raggiungimento dello sforzo massimo.

In definitiva, come risultato della prova di trazione diretta, otteniamo la relazione tensione - deformazione per la zona esterna a quella danneggiata e la relazione tensione - allungamento relativa alla zona danneggiata, a partire dalla tensione massima (fig.2). L'energia di frattura G_F che si dissipa nella zona danneggiata è misurata dall'area sottesa dalla curva $\sigma - w$ (fig.2).

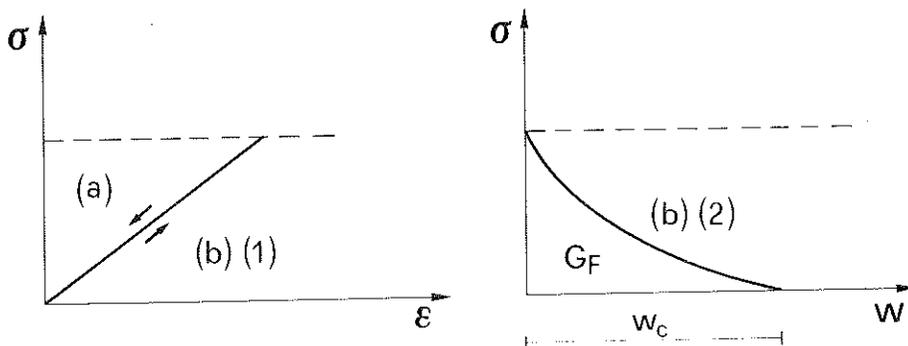


Fig. 2 - Relazione tensione - deformazione per la zona esterna a quella danneggiata e relazione tensione-allungamento relativa alla zona danneggiata.

Prove di trazione

La realizzazione di una prova di trazione diretta priva di eccentricità è sempre difficoltosa e, generalmente, complicata da trazioni secondarie indotte dai morsetti o da occlusioni interne al materiale (11).

Per trasmettere ad un provino una forza di trazione pura il sistema di afferraggio non deve provocare tensioni secondarie di flessione o di torsione che possono derivare da eccentricità per difetti di montaggio e di geometria del provino.

A causa di queste difficoltà è talvolta preferibile ricavare la resistenza a trazione in modo indiretto, sia da una prova di trazione indiretta, sia da prove di flessione. La prova di trazione diretta può essere eseguita (13):

- 1) mediante l'impiego di sistemi di contrasto sulle teste dei provini opportunamente sagomate;
- 2) mediante incollaggio di piastre di acciaio alle facce terminali di provini cilindrici o prismatici. Le piastre devono essere collegate ad uno snodo che può essere afferrato dalle mordacchie delle usuali macchine universali;
- 3) mediante annegamento nel getto di un'armatura contrastata da una piastra sufficientemente rigida a sua volta collegata ad uno snodo come nel caso precedente.

Il sistema della piastra incollata è previsto da diverse normative: UNI 6135/75, NF P 18-409/69, NBN B 15-211/74, RILEM C PC 7/75. Esso consente di sottoporre a prova di trazione provini appositamente confezionati oppure prelevati da strutture in opera. Tuttavia ad esso sono mosse critiche da alcuni Autori in quanto la principale difficoltà è di evitare che la rottura si verifichi nelle zone direttamente interessate dall'incollaggio (14). Infatti, sulla superficie del provino direttamente a contatto con lo stampo, si forma un sottilissimo strato di cemento che si distacca anche sotto l'azione di carichi relativamente bassi. Ciò provoca una notevole dispersione dei risultati che si ottengono con questo tipo di prova (15). Inoltre, se il provino viene incollato alle piastre molto tempo prima della prova, a causa dell'elevato indurimento raggiunto dalla colla, si genera uno stato di coazione nel calcestruzzo e quindi una microfessurazione dello stesso. Questa, al momento della prova, dà luogo a concentrazioni di tensione, e conseguenti, disperse, riduzioni delle resistenze. Infine, per recuperare le piastre, gli spezzoni risultanti dalla prova devono essere tenuti per 2-3 ore in forno a temperature di 140-160 °C (16) e quindi pulite dai residui di collante

con una spazzola metallica. Il problema della rottura in prossimità della zona di incollaggio può essere eliminato trasmettendo gli sforzi mediante un'armatura annegata nel getto (13) anche se, così facendo, non si escludono concentrazioni di tensione: infatti la trasmissione degli sforzi al calcestruzzo avviene per aderenza e ciò comporta una elevata probabilità che la rottura si verifichi in corrispondenza della sezione del provino alla quota di annegamento dell'armatura. La suddetta difficoltà potrebbe essere superata mediante l'impiego di un'armatura molto diffusa ed aumentando la sezione resistente del provino nella zona da essa impegnata. Per evitare problemi di centratura e sistemazione dell'armatura medesima questa va ben fissata alla cassaforma. In generale, perchè la prova sia valida, la rottura deve avvenire in un tratto centrale del provino di sezione costante (tratto che la UNI 6135/72 fissa non inferiore a quattro volte la massima dimensione trasversale).

E' stato osservato (17) che non è tecnicamente valido l'approntamento di provini con la sezione centrale più ristretta rispetto alle teste facendo ricorso a stampi rigidi, in quanto il ritiro plastico e l'eventuale contrazione termica del calcestruzzo, impediti dallo stampo, possono essere causa, durante la presa, di microfessure estese che all'atto della prova innescano la rottura per valori più bassi della resistenza effettiva. Il ricorso ad inserti di materiale deformabile riduce eventualmente tale rischio.

Sovente, in corrispondenza del carico massimo sopportato, il campione, si rompe in modo incontrollato ed i diagrammi tensione - deformazione o carico spostamento registrati presentano un tratto quasi verticale ad indicare che la resistenza del materiale scende bruscamente a zero. Tale comportamento non è quello reale nel calcestruzzo ma dipende proprio dalle modalità di prova e dalle caratteristiche della macchina. Da risultati sperimentali è emerso che operando in controllo di deformazione, il diagramma tensione-deformazione in trazione è non lineare ed ha un ben definito tratto ascendente ed uno discendente (18,19,20).

Se infatti si dispone di una macchina sufficientemente rigida, in grado cioè di restituire, dopo la rottura, energia elastica inferiore a quella richiesta dal campione, e se si sollecita il materiale a velocità di deformazione costante, è possibile mettere in evidenza che, anche se fessurato, il calcestruzzo è in grado di sopportare carichi ancora consistenti con grandi deformazioni. La rigidità, costante della macchina di prova, è definita (21) come $k=P/X_m$, cioè come rapporto tra il carico P applicato al campione e la somma X_m delle deforma-

zioni X_i delle varie parti della macchina, supposte perfettamente elastiche.

In un diagramma P-X la caratteristica della rigidezza è definita dalla pendenza

$$\alpha = \arctg k \text{ (fig. 3).}$$

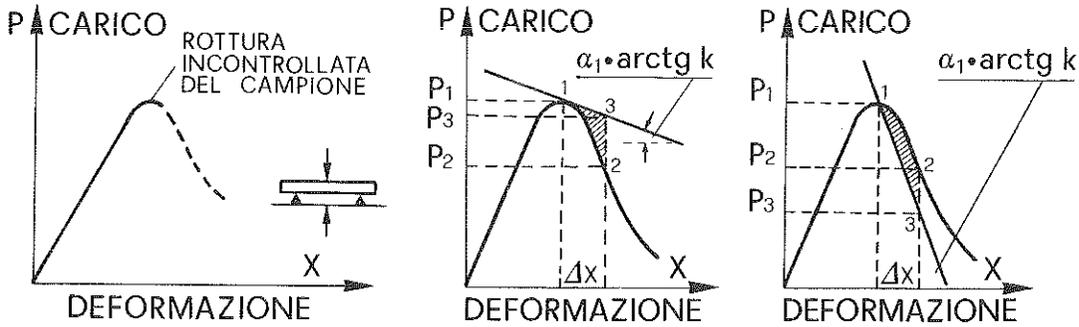


Fig. 3 - Rigidezza della macchina di prova

La rigidezza del provino che ha legame tensione deformazione non lineare, è definita analogamente come $k_o = P/X_p$ cioè come rapporto tra carico applicato P e deformazione del provino X_p ; essa non è costante ma funzione del carico. La rigidezza k incide sulla quantità di energia elastica liberata U pari a (fig. 3).

$$\Delta U = [P_1 - 0.5 (P_1 - P_3)] \Delta X$$

Affinchè il diagramma sia riproducibile (prova stabile) deve risultare:

$$\Delta U < \Delta L$$

cioè l'energia elastica deve essere minore del lavoro propriamente necessario alla rottura del campione (22) L pari a (fig. 3):

$$\Delta L = \int_1^2 P dx$$

Vale a dire che il ramo discendente della curva P-X è rilevabile se la pendenza K è maggiore di quella della tangente alla curva. Interessanti considerazioni sull'influenza della rigidezza k della macchina di prova sulla curva tensione-deformazione sono state fatte da Petersson (23) il quale ha fornito, da calcolazioni numeriche, condizioni di stabilità tramite un dominio in cui l'altezza del campione è funzione della sezione trasversale e della rigidezza k. Da tali condizioni, in via di larga massima, si può ricavare che per un provino di calcestruzzo

con modulo elastico pari a 25000 N/mm^2 , energia di frattura G_f pari a 0.1 N/mm , resistenza a trazione pari a 3 N/mm^2 e sezione resistente di 1000 mm^2 la lunghezza non deve essere superiore a 250 mm e la rigidezza della macchina non deve essere inferiore a 10^6 N/mm^2 . Nel lavoro di Petersson è anche descritta una macchina di prova molto rigida che consente di tracciare, per provini di calcestruzzo, la curva completa tensione-deformazione, ed è costituita da tre colonne di alluminio ($\varnothing 120 \text{ mm}$) fissate tra due blocchi di calcestruzzo. Alle colonne sono sovrapposti tre elementi riscaldanti ed il provino è fissato ai blocchi mediante speciali afferraggi. Le colonne di alluminio, riscaldate, si espandono e, quindi, il provino è assoggettato al carico che viene registrato tramite comparatori collegati agli afferraggi; mentre le deformazioni sono misurate per mezzo di trasduttori induttivi fissati direttamente al provino. Durante la prova le colonne di alluminio sono isolate termicamente per mantenere costante la temperatura attorno al provino. I provini adoperati sono del tipo illustrato in Fig.4.

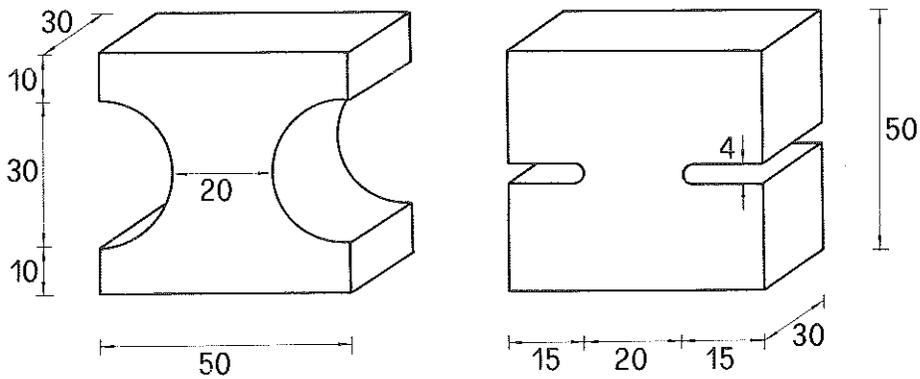


Fig. 4 - Provini di trazione (misure in mm) (23).

E' stato osservato che la stabilità della rottura dipende anche dalla lunghezza della base di misura che si adotta per la deformazione (24). In conseguenza, quando la prova è condotta controllando la deformazione, tale controllo si esplica sulla deformazione globale, mentre localmente, intorno al crack, le deformazioni aumentano in maniera improvvisa dando talvolta luogo a rottura di tipo instabile. Le possibilità di una rottura di questo tipo si riducono se si adotta una base di misura piccola. Tuttavia in questo caso è più probabile che il crack sia esterno alla base di misura determinando, ancora una volta, rottura instabile.

Una possibile soluzione del problema (25) consiste nell'adoperare provini intagliati

considerando come parametro di controllo il solo spostamento nella regione dell'intaglio, che può riguardare sia l'intero provino che due facce di esso.

Bisogna comunque tener presente che l'apertura del crack può iniziare a svilupparsi su uno qualsiasi dei lati intagliati. E' stato osservato sperimentalmente (25) che, in media, il comportamento dei provini intagliati è identico a quello dei provini senza intaglio e che, per entrambi, la rottura si ha in un'unica sezione critica. Per i provini intagliati il piano di rottura è predeterminato ed è quindi impossibile misurare gli spostamenti, le deformazioni e l'allargamento del crack. Si riportano ora le descrizioni di alcune prove di trazione eseguite su calcestruzzo semplice.

Nel 1968 (26) è stato messo a punto un metodo che adopera provini di sezione circolare, delle dimensioni illustrate in fig. 5, essendo tale tipo di sezione ritenuta più idonea ad essere assoggettata ad un carico assiale centrato. Alle estremità dei provini sono state fissate delle "cuffie" (fig.6) tramite le quali è applicato il carico a mezzo di cavi flessibili onde rendere minimi eventuali momenti agenti.

Un'altra indagine svolta su provini cilindrici assottigliati (27), ha consentito di ottenere l'intera curva tensione-deformazione. I provini, di diametro minimo di 120 mm ed altezza 300 mm, gettati verticalmente in stampi di acciaio, presentano, a metà altezza, un inta-

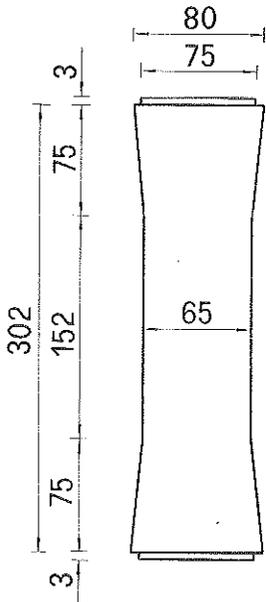


Fig. 5 - Forma dei provini
(misure in mm)

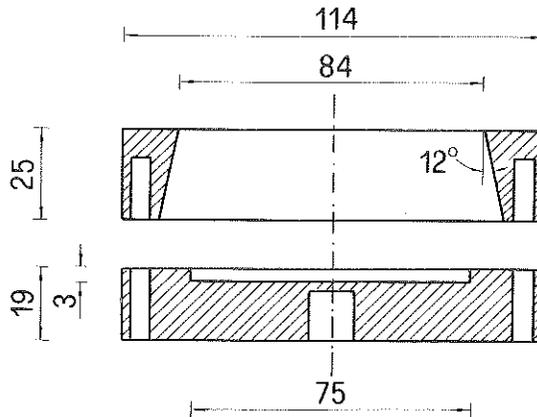


Fig. 6 - Cuffie (misure in mm)

glio, prodotto con una sega, di lunghezza e profondità pari a 5 mm che non riduce la resistenza del calcestruzzo (27).

Provini prismatici di dimensioni 76 x 38 x 305 mm sono descritti in (25), così realizzati soprattutto per la semplicità di confezionamento e di serraggio. In questo caso le ganasce sono state opportunamente progettate per garantire che la rottura avvenga lontano da esse. I provini presentano, nella sezione centrale, due intagli di 13 mm di profondità e 3 mm di spessore. Per ottenere un comportamento stabile le prove sono state eseguite con una macchina servocontrollata caricando i provini a velocità di allungamento costante.

Materiali fibro-rinforzati

Da alcuni anni si è iniziato ad utilizzare nuovi materiali che, pur avendo tutti i vantaggi dei materiali cementizi (facilità di formatura, elevate caratteristiche in compressione, basso costo) ne riducono i "difetti" (fragilità, bassa resistenza agli urti, bassa resistenza a trazione). Questi materiali si ottengono con l'introduzione di fibre discontinue, quanto più possibile uniformemente distribuite nella matrice cementizia. Il rinforzo fibroso, in genere, più che vistosi incrementi di resistenza a trazione, provoca fessurazione multipla sotto carico e determina incrementi significativi dell'allungamento a rottura: queste caratteristiche possono sintetizzarsi in un unico concetto, e cioè in un incremento di caratteristiche definibili, per i materiali ceramici, come duttilità sia in compressione che in trazione (28). Il comportamento duttile, nei compositi cementizi, si verifica se la quantità di fibre presenti è maggiore di un "volume critico" V_f definito come quel volume per cui, dopo la fessurazione della matrice, le fibre stesse sono in grado di sostenere il carico prima applicato all'intero composito (29). La lunghezza delle fibre deve poi essere superiore alla "lunghezza critica" $l_c = \sigma_{fu} r / \tau$ (r essendo il raggio della fibra, τ la tensione di aderenza fibra-matrice, σ_{fu} la tensione di trazione ultima nelle fibre) definita come quel valore oltre il quale le fibre si spezzano piuttosto che sfilarsi (29).

Analogamente a quanto avviene nel caso dei calcestruzzi normali, anche per questi materiali fibro-rinforzati è particolarmente significativa una completa caratterizzazione in trazione cioè con prove che consentono di tracciare l'intera curva tensione-deformazione (30). Infatti il reale valore del rinforzo fibroso non risiede tanto nel miglioramento di resistenza quanto nell'azione di controllo sul crack (31) con conseguente aumento dell'energia

di frattura del materiale (obiettivo da perseguire per realizzare strutture con adeguato grado di duttilità) (8). L'uso della prova di trazione indiretta per i cementizi fibrosi, come per il calcestruzzo semplice, fornisce indicazioni solo fino al punto di prima fessurazione, ma, da questo alla rottura finale, la distribuzione di tensioni è del tutto sconosciuta e non può fornire dati significativi (32). Per i cementizi fibro-rinforzati le dimensioni del provino da adoperare per una prova di trazione dipendono dal tipo di composito che si vuole esaminare, cioè sia dal tipo di matrice che dal tipo di fibre adoperate. Ad esempio nel caso di compositi con rinforzo costituito da fibre di vetro i provini sono piuttosto sottili in quanto gli elementi che di solito si realizzano con questi materiali sono di limitato spessore (33). In letteratura sono disponibili dati relativi a varie sperimentazioni volte ad ottimizzare le prove di trazione diretta su fibro-rinforzati. Provini di $150 \times 50 \times 8 \text{ mm}$, tagliati da lastre confezionate in calcestruzzo rinforzato con fibre di vetro sono stati sottoposti a prova (30) serrando i provini stessi tra le morse della macchina di prova, e mantenendo la pressione delle morse stesse a valori minimi, al fine di ridurre la concentrazione di tensione alle estremità del provino, aumentando opportunamente tale pressione se questo tende a slittare.

Barrette di calcestruzzo rinforzato con fibre di vetro delle dimensioni di $150 \times 25 \times 8 \text{ mm}$ sono state provate stringendole direttamente fra le ganasce di una macchina universale. In altri casi sono stati realizzati provini opportunamente sagomati, di lunghezza totale 315 mm e larghezza dell'anima di 25 mm , provati mediante un meccanismo capace di allineare automaticamente l'asse del provino a quello di applicazione del carico (34). Per ottenere il ramo discendente della curva tensione-deformazione di provini di calcestruzzo rinforzato con fibre di acciaio, la macchina di prova è stata irrigidita caricando il provino in parallelo con quattro barre di acciaio ad alta resistenza (35) in analogia a quanto fatto (19) per il calcestruzzo semplice. Prove di trazione sono state eseguite su due serie di provini di calcestruzzo rinforzati con fibre di acciaio, di cui una prima serie era costituita da elementi a sezione uniforme quadrata di lato 102 mm ed altezza 610 mm , mentre l'altra era costituita da elementi di altezza 762 mm e sezione quadrata all'estremità, sempre di lato 102 mm , ma con sezione ridotta nel tratto centrale di dimensioni $76 \times 102 \text{ mm}$ (36). In tutti i casi gli afferraggi per i provini sono stati appositamente progettati. Per la determinazione della

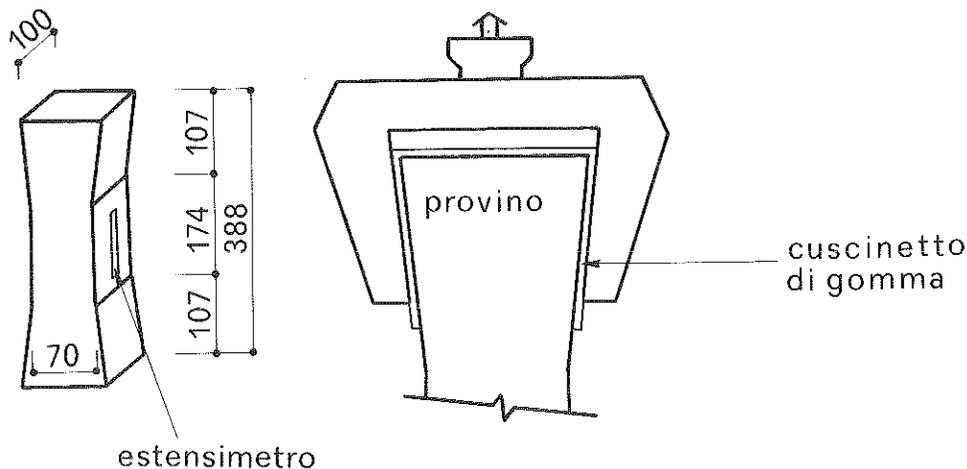


Fig. 7 - Provino di calcestruzzo rinforzato con fibre di acciaio, (misure in mm).

resistenza a trazione diretta di calcestruzzi convenzionali e fibro-rinforzati è stato proposto (37) un metodo che adotta i provini di dimensioni 480 x 50 x 50 mm realizzati con apposito stampo. Un provino per trazione diretta utilizzato per compositi contenenti fibre di acciaio è illustrato in Fig. 7 (38). Prove di trazione sono state eseguite su matrici cementizie alleggerite rinforzate con fibre di polipropilene (39) su provini sagomati ad osso di cane allungato, aventi la parte centrale di lunghezza 160 mm e sezione trasversale di 25 x 25 mm, direttamente afferrati nella macchina di prova. Relativamente a prove su conglomerati rinforzati con fibre allineate e reti di polipropilene sono stati provati elementi di 40 x 13 x 250 mm (40) e 25 x 6 x 300 mm (41). La resistenza ultima del calcestruzzo rinforzato con fibre di carbonio è stata determinata utilizzando provini del tipo illustrato in fig. 8 (42). Il calcestruzzo fibro-rinforzato è soggetto, in molte applicazioni, a sollecitazioni

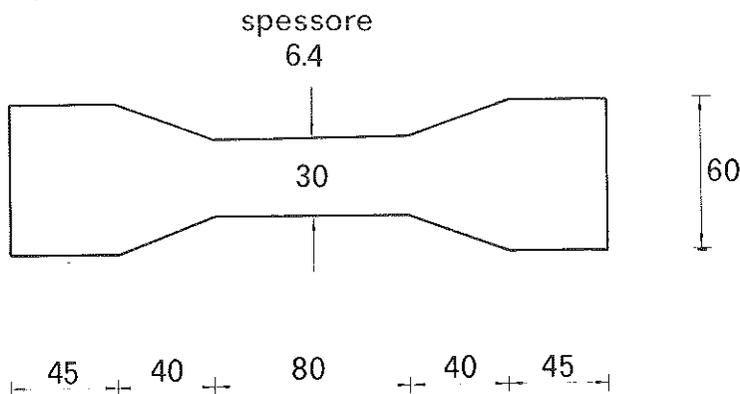


Fig. 8 - Provino di calcestruzzo rinforzato con fibre di carbonio, (misure in mm).

flessionali piuttosto che assiali; perciò è importante determinare anche le sue prestazioni sotto l'azione di momenti flettenti. Spesso il modulo di rottura (resistenza ultima in flessione) è la sola caratteristica del materiale che viene determinata (43), probabilmente perché la prova di flessione è abbastanza semplice da eseguire e consente di evitare alcune delle difficoltà della prova di trazione diretta. Bisogna comunque osservare che, quando un materiale ha un comportamento non lineare, per carichi prossimi a quello di rottura, la teoria elastica della flessione non è più valida. In conseguenza di ciò il valore di resistenza ottenuto è maggiore di quello effettivo, (il rapporto tra massima tensione di trazione in flessione ed in trazione diretta può anche essere uguale a 3 (32)). Tuttavia sono state fornite delle espressioni teoriche che consentono di prevedere il comportamento in flessione quando sia determinata la curva tensione-deformazione in trazione e, viceversa, è possibile valutare la relazione tensione deformazione in trazione diretta quando siano noti i dati in flessione (44). Vi sono due tipi di prove di flessione comunemente adottate: con quattro punti di carico e con tre punti di carico. Il primo è generalmente preferibile per la maggior parte dei materiali, ma il secondo è spesso usato quando è richiesta una maggior semplicità di prova oppure per la determinazione dell'energia di frattura (30). Lo svantaggio principale della prova con tre punti di carico è che il momento flettente non è uniforme, ma è massimo in mezzeria. La possibilità che la rottura si verifichi in questa zona è molto elevata e, proprio perché la rottura medesima è confinata in una zona ristretta può, talvolta, essere poco rappresentativa del comportamento dell'intero materiale (30). Poiché come più volte ripetuto, l'effetto principale delle fibre è quello di migliorare il comportamento deformativo a rottura della matrice, si è pensato di definire un "indice di tenacità I" con lo scopo di misurare una proprietà che distingua il calcestruzzo fibro-rinforzato da quello ordinario (46). Bisogna ricordare che la tenacità è definita come l'area sottesa da una qualsiasi curva tensione-deformazione (46).

L'indice di tenacità proposto è una misura della capacità del materiale di assorbire energia in flessione. Si ottiene conducendo una prova in flessione, normalizzata secondo ASTM C 78, su un provino di circa 100 x 100 x 350 mm e registrando il relativo diagramma carico-freccia in mezzeria, arrestando la prova allorchè si giunge alla freccia di 1.9 mm. L'indice si calcola (fig. 9) come rapporto tra l'area ABCA e quella ABE relativa alla prima fessura-

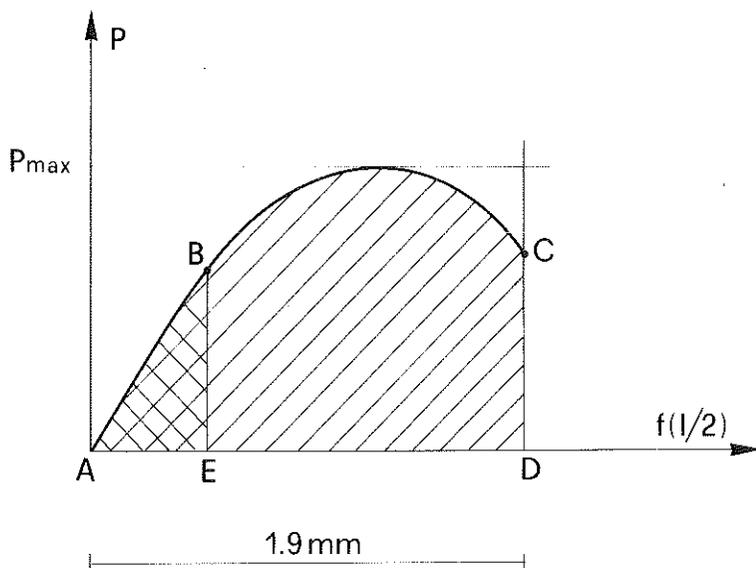


Fig. 9 - Aree per la determinazione dell'indice di tenacità.

zione della matrice:

$$I = \text{area } ABCD / \text{area } ABE$$

La prima fessurazione è riferita allo scostamento dalla linearità della curva carico-freccia. La prova deve essere condotta in controllo di spostamento; se si opera mantenendo costante la velocità di applicazione del carico non si ottengono risultati accettabili (45). Per un calcestruzzo senza fibre è $I = 1$, mentre per fibro-rinforzati I dovrebbe variare tra 12 e 45 (45). Prove eseguite su calcestruzzi rinforzati con piccole quantità di fibre di acciaio hanno fornito un valore di I intorno a 5 (47).

Determinazione dell'energia di frattura secondo le prescrizioni RILEM

In conseguenza delle difficoltà esposte relativamente all'esecuzione di prove di trazione diretta stabili, solo i laboratori meglio equipaggiati hanno la possibilità di eseguire prove. Per tale motivo la prova di trazione diretta non può essere standardizzata per la determinazione dell'energia di frattura (48). Le raccomandazioni RILEM (49) suggeriscono di determinare G_f mediante una prova di flessione con tre punti di carico nel modo seguente: si esegue una prova stabile su provini intagliati del tipo di fig. 10 e delle dimensioni, dipendenti dal diametro massimo dell'aggregato, riportate in tabella 1 (l'intaglio deve avere profondità uguale a metà altezza della trave ± 15 mm). La prova è conclusa quando il provino

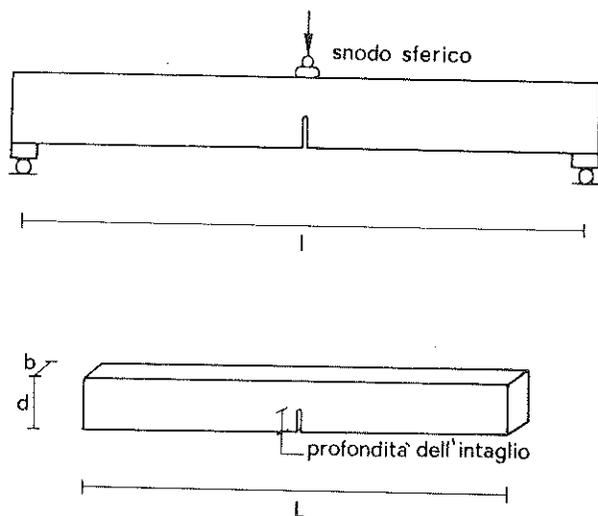


Fig. 10 - Provini per la determinazione dell'energia di frattura.

Tabella 1: Dimensioni dei provini.

D_{max} (mm)	d (mm)	b (mm)	L (mm)	I (mm)
1-16	100 ± 5	100 ± 5	840 ± 10	800 ± 5
16.1-32	200 ± 5	100 ± 5	1.190 ± 10	1.130 ± 5
32.1-48	300 ± 5	150 ± 5	1.450 ± 10	1.385 ± 5
48.1-64	400 ± 5	200 ± 5	1.640 ± 10	1.600 ± 5

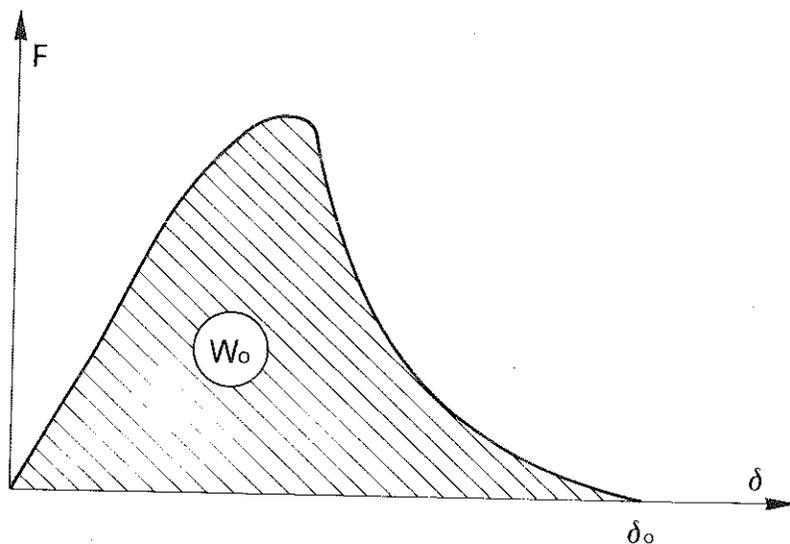


Fig. 11 - Diagramma carico-freccia corretto.

è separato in due tronconi; la curva carico-freccia così ottenuta è corretta da eventuali non linearità iniziali (fig. 11). L'energia di frattura è calcolata con l'equazione:

$$G_f = (W_o + mg\delta_o)/A_{lig}$$

in cui:

W_o = area sottesa dalla curva F- δ (fig. 19);

$m = m_1 + 2m_2$;

m_1 = massa del provino tra gli appoggi;

m_2 = massa delle parti del dispositivo di carico, non solidali con la macchina di prova, che seguono il provino nella sua deformazione fino a rottura;

g = accelerazione di gravità ;

δ_o = freccia corrispondente alla rottura totale del provino [m];

A_{lig} = area del ligament, cioè della sezione intagliata di mezzeria.

La determinazione sperimentale dell'energia di frattura da prove di flessione, per cementizi fibrosi, comporta un'ulteriore difficoltà conseguente al fatto che la separazione di un provino in due tronconi avviene solo per spostamenti molto grandi. Si dovrebbe quindi stabilire uno spostamento "convenzionale" raggiunto il quale far cessare la prova (50). Una soluzione potrebbe essere di adottare l'indicazione relativa alla determinazione dell'indice di tenacità, cioè una freccia di 1,9 mm.

Alcuni Autori (50, 51) sono però propensi a considerare, piuttosto che un valore di spostamento assoluto, uno proporzionale a quello che, di volta in volta, si ottiene sui provini senza fibre.

Conclusioni

In quanto esposto sono evidenziate numerose tematiche, alcune delle quali sono già da lungo tempo in discussione. Altre sono di origine più recente e tra queste l'analisi dell'effetto dimensionale sul comportamento degli elementi strutturali, il cui studio ha avuto un notevole sviluppo grazie all'applicazione delle teorie della Meccanica della Frattura.

Agli effetti dimensionali è connessa la difficoltà di esecuzione di prove di trazione diretta e nemmeno l'influenza della rigidità della macchina rispetto a quella del provino è trascurabile. Una caratterizzazione dei materiali cementizi in trazione è però possibile anche tramite prove di flessione: tale, ad esempio, è il metodo di determinazione dell'ener-

gia di frattura proposto dalla RILEM.

Per i materiali cementizi fibrosi, tuttavia, pur continuando a sussistere alcune difficoltà di prova proprie dei materiali senza fibre, se ne aggiungono altre dovute agli elevati spostamenti che gli elementi strutturali subiscono dopo la fessurazione, prima della rottura. Per tale motivo, gli studi di molti ricercatori sono volti all'analisi e messa a punto di metodi per la determinazione del comportamento di questi materiali il cui impiego, se possibile su larga scala, potrebbe determinare un rinnovamento nell'ingegneria strutturale.

Bibliografia

1. Di Tommaso A.: "Recenti sviluppi delle teorie di resistenza dei materiali", INARCOS, n. 408, maggio 80, pp. 151 - 157, (1980)
2. Palmonari C.: "I materiali ceramici tenaci", atti giornate di studio ASMI, Arcavacata di Rende (Cosenza), 29 - 30 ottobre 85, pp. 27 - 46, (1985)
3. Sih G.C.: "Handbook of stress-intensity factors for researches and engineers", Lehigh University, Bethlehem, Pennsylvania (1973).
4. Standard Method of Test for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials, E 399 - 74, ASTM, (1974)
5. Wilson W.K.: "Stress-intensity factors for deep cracks in bending and compact tension specimens", Engineering Fracture Mechanics, n. 2, pp. 169 - 171 (1970).
6. Benthem J.P., Koiter W.T.: "Asymptotic approximations to crack problems", Methods of analysis of crack problems, ed. by Sih G.C., chap.3 Noordhoff, Holland, (1972).
7. Carpinteri A.: "Notch sensitivity in fracture testing of aggregative materials", Engineering fracture mechanics, vol. 16, n. 4, pp. 109 - 122, (1982).
8. Di Tommaso A.: "Apporti all'energia di frattura dei calcestruzzi mediante inclusione di fibre", Atti convegno AITEC, Parma, ottobre 85, pp. 137 - 147, (1985)
9. Carpinteri A.: "Effetti dimensionali sulla fragilità delle strutture in calcestruzzo", Atti Convegno AITEC, Parma, ottobre 85, pp. 109 - 122, (1985)
10. Hillerborg A.: "A model for fracture analysis", Report TVBM 3005, University of Lund, Sweden, (1978).
11. Petersson P.E.: "Fracture energy of concrete: method of determination", Cement and Concrete Research, vol. 10, pp. 79 - 89, (1980).
12. Neville A.M.: "Le proprietà del calcestruzzo", Sansoni ed., pp. 399 - 407, (1975).
13. Di Leo A.: "La prova di trazione diretta del calcestruzzo", INARCOS, vol. 408, maggio 80, pp. 167 - 175, (1980)
14. RILEM Committee: "Essai de traction directe du beton", Enquete RILEM Materiaux et Constructions, n. 20, (1963).
15. Gorisse F.: "Essais et controle des betons", editions Eyrolles, Paris, pp.96 - 97, (1978)
16. Spelta Z., Kadlecik V.: "Effect of the slenderness on the direct tensile strength of con-

- crete cylinders and prisms", *Materiaux et Constructions*, n. 33, (1966).
17. Bertacchi P.: "Normativa e controllo dei materiali dell'ingegneria strutturale", Seminario, Ismes - Istruzione permanente, maggio 1985, pp. 6 - 9.
 18. Carreira D.J., Chu K.H.: "Stress-strain relationship for reinforced concrete in tension", *J. Amer. Concr. Inst.*, jan. - feb. 1986, pp. 21 - 28.
 19. Hughes B.P., Chapman G.P.: "The complete stress-strain curve for concrete in direct tension", *Materiaux et Constructions*, n. 30, pp. 95 - 97, (1966).
 20. Mazars J.: "Evolution de la microfessuration dans le béton: formation des fissures", *Béton*, n. 202, oct. 1981, pp. 27 - 33.
 21. Dei Poli S.: "Microfessurazioni, leggi costitutive e condizioni di rottura del calcestruzzo in stati di tensione mono e pluriassiali", *Italcementi*, pp. 15 - 16, (1978).
 22. Ferrara G.: "Prove stabili in flessione su calcestruzzi: confronto tra i parametri di tenacità alla frattura ottenuti", XI Convegno Nazionale AIAS, 26 - 28 sett. 1983, pp. 177 - 188.
 23. Petersson P.E.: "Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials", Report TVBM - 1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, pp. 101 - 169, (1981).
 24. Eligehausen R., Sawade G.: "Behaviour of concrete in tension", *Betonwerk - Fertigteil - Technik*, may - june 85, pp. 315 - 322, 389 - 391, (1985).
 25. Gopelaratnam V.S., Shah S.P.: "Softening response of plain concrete in direct tension", *J. Amer. Concr. Inst.*, may - june 86, pp. 310 - 322, (1986).
 26. Elvery R.H., Haroun W.: "A direct tensile test for concrete under long-or short-term loading", *Magazine of Concrete Research*, vol.20, n.63, june 68, pp.11-16, (1968).
 27. Reinhardt H.W., Cornelissen H.A.W.: "Post-peak cyclic behaviour of concrete in uniaxial tensile and alternating tensile and compressive loading", *Cement and Concrete Research*, vol. 14, n. 2, pp. 263 - 266, (1984).
 28. Shah S.P., Naaman A.E.: "Mechanical properties of glass and steel fiber reinforced mortar", *J. Amer. Concr. Inst.*, Proc. vol. 73, n. 1, feb. 76, pp. 50 - 53, (1976)
 29. Hannant D.J., "Fibre cements and fibre concretes", John Wiley & Son, Chichester, pp. 8-51, (1978).
 30. Singh B., Walton P.L., and Stuke M.S.: "Test methods to measure the mechanical properties of fibre cement composites at the Building Research Establishment", *Rilem Symposium 1978*, Ed. Swamy R.N., Construction Press Ltd, Lancaster, pp. 378 - 386, (1978).
 31. Swamy R.N.: "Evaluation of fibre reinforced cement based composites", *Materiaux et Constructions*, vol. 8, n. 45, pp. 235 - 251, (1975).
 32. Shrader E.K.: "Formulating guidance for testing of fibre concrete in ACI Committee 544", *Rilem Symposium 1978*, Ed. Swamy R.N., Construction Press Ltd., Lancaster, pp.9-21, (1978)
 33. Singh B., Majumdar A.J.: "The effect of p.f.a. addition on the properties of glass reinforced concrete", *The International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete*, vol. 7, n. 1, feb. 85, pp. 3 - 10, (1985)
 34. Green M.F., Oakly D.R. and Proctor B.A.: "Tensile testing of glass reinforced cement sheet", *Rilem Symposium 1978*, Ed. Swamy R.N., Construction Press Ltd., Lancaster, pp. 439

35. Shah S.P., "Complete stress-strain curves for steel fibre reinforced concrete in uniaxial tension and compression", Rilem symposium 1978, Ed. Swamy R.N., Construction Press Ltd., Lancaster, pp. 400 - 407, (1978).
36. Johnston C.D., Gray R.J.: "Uniaxial tensile testing of steel fibre reinforced cementitious composites", Rilem Symposium 1978, Ed. Swamy R.N., Construction Press Ltd., Lancaster, pp. 452 - 461, (1978).
37. Pihlajavara S.E.: "Testing methods of fibre reinforced concrete as designed and applied in the Technical Research Centre of Finland concrete laboratory", Rilem Symposium 1978, Ed. Swamy R.N., Construction Press Ltd., Lancaster, pp. 198 - 203, (1978).
38. Kameda Y., Koizumi H. et al.: "Studies and applications of steel fiber reinforced concrete", Kajima Institute of Construction Technology, Report n.31, oct. 79, pp.1-18, (1979)
39. Baggot R.: "Polypropylene fibre reinforcement of lightweight cementitious matrices", The International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, vol. 5, n. 2, may 83, pp. 105 - 114, (1983)
40. Baggot R., Gandhi D.: "Multiple cracking in aligned polypropylene fibre reinforced cement composites", Journal of Materials Science, vol. 16, pp. 65 - 67, (1981).
41. Hannant D.J.: "Durability of cement sheets reinforced with fibrillated polypropylene networks", Magazine of Concrete Research, vol.35, n.125, dic. 83, pp.197-204, (1983)
42. Waller J.A.: "Carbon fiber cement composites", Fiber reinforced concrete, Amer. Concr. Inst. Publication SP-44, Detroit pp. 143 - 151, (1974).
43. Johnston C.D.: "Steel fiber reinforced and plain concrete: factors influencing flexural strength measurement", Jour. Amer. Concr. Inst., march-april 82, pp. 131-138, (1982).
44. Lows V., Walton P.L.: "The tensile bending relationship for fibre reinforced brittle matrices", Rilem symposium 1978, Ed. Swamy R.N., Construction Press Ltd., Lancaster, pp. 429 - 438, (1978).
45. Henager C.H.: "A toughness index of fiber concrete", Rilem Symposium 1978, Ed. Swamy R.N. Construction Press Ltd., Lancaster, pp. 79 - 86, (1978).
46. Fanella D.A., Naaman A.E.: "Stress-strain properties of fiber reinforced mortar in compression", Jour. Amer. Concr. Inst., july - august 1985, pp. 475 - 483.
47. Ramakrishnan V., Coyle W.V., Kulandaisamy V. and Shrader E.K.: "Performance characteristics of fiber reinforced concretes with low fiber contents", Jour. Amer. Concr. Inst., sept. - oct. 81, pp. 388 - 394, (1981).
48. Hillerborg A.: "The theoretical basis of a method to determine the fracture energy G of concrete", Materiaux et Constructions, vol. 18, n. 106, pp. 25 - 30, (1985).
49. Rilem Committee 50-FMC : "Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three point bending test on notched beams", Rilem (draft) Recommendation, (1985).
50. Di Tommaso A.: "Le fibre di acciaio in conglomerati cementizi", Acciaio, n. 2, pp. 3 - 7 (1986).
51. Hasso E.B.D., Ban B.I.G.: "Toughness measurements on steel fibre reinforced concrete", X Conference on Our World in Concrete and Structures, Conference documentation, vol. IV, Singapore, pp. 317 - 340, (1985).

I N D I C E

E. Cocco, M. A. de Magistris, A. De Matteis, T. De Pippo - Il litorale del Parco Nazionale del Circeo: caratteri morfologici e sedimentologici; deriva dei sedimenti	Pag. 5
B. Stroffolini - Medie di tipo Jensen in spazi di Orlicz	" 29
M. R. Crisci, E. Russo, A. Vecchio - Periodicity intervals of the Tau Method for the numerical integration of certain second order differential equations	" 39
P. L. De Angelis, M. Murli, M. A. Pirozzi - A convention-diffusion numerical model for a basin	" 57
A. Fiorenza - A note on the spherical maximal function	" 77
E. de Alteriis, P. Parascandola, M. A. Pecorella - Sulla diffusione in gel irreversibili di gelatina	" 85
M. de Vincentiis, R. Gualtieri, G. Iazzetti, Silvia Scippa - Comparative histochemical study of actomyosin atpase activity of the body wall muscle of phlebobranchia and stolido branchia ascidians	" 93
E. Marsella, G. Pappone - Evidenze di un'area di scarpata mesozoico-terziaria nei domini della piattaforma carbonatica Campano-Lucana Monti della Maddalena, Appennino Meridionale	" 101
E. Marsella - L'intervallo triassico superiore giurassico della serie calcareo silico marnosa tra San Fele e l'Alta Val d'Angri. Appennino Campano-Lucano	" 111
G. Rolandi, F. Russo - Contributo alla conoscenza dell'attività storica del Vesuvio: la stratigrafia di Villa Inglese (Torre del Greco)	" 123
G. Criscuolo - Un metodo iterativo per la risoluzione dell'equazione matriciale $AX + XB = C$	" 159
A. M. Reda, G. Spadea - Calcestruzzi normali e fibrosi e questioni sperimentali	" 173

